О локальных временах условных случайных блужданий

Афанасьев В.И.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины с одинаковым арифметическим распределением с максимальным шагом 1, причем $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2 \in (0, +\infty)$.

Рассмотрим случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$ при $i \in \mathbf{N}$. Пусть $\xi(k,n)$ означает число попаданий блуждания $\{S_n,\ n \geq 0\}$ в состояние $k \in \mathbf{Z}$ за моменты времени $1, \ldots, n$, т.е.

$$\xi(k,n) = \left|\{i \in \{1, \ldots, n\} : S_i = k\}\right|.$$

Пусть $\{W(t),\ t \geq 0\}$ – стандартное броуновское движение. Введем следующие два момента достижения состояния 0 броуновским движением W: один из них τ_0' предшествует моменту 1, а другой τ_0'' следует за этим моментом, т.е.

$$\tau_0' = \sup\{t \in [0,1] : W(t) = 0\},\ \tau_0'' = \inf\{t > 1 : W(t) = 0\}.$$

Положим $T_0^+ = \tau_0'' - \tau_0'$. *Броуновской экскурсией* называется случайный процесс, равный $W(\tau_0' + t)$ при $t \in \left[0, T_0^+\right]$ и равный 0 при $t \geq T_0^+$. Обозначим этот процесс $\{V(t), t \geq 0\}$. *Броуновская извилина* строится по броуновской экскурсии: при $t \geq 0$

$$W^+(t) = \frac{|V((1-\tau_0')\,t)|}{\sqrt{1-\tau_0'}}.$$

Пусть $l^+(u,t)$ – локальное время процесса $\{W^+(s),\ s \in [0,t]\}$ на уровне $u > 0$, т.е.

$$l^+(u,t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t I_{[u,u+\varepsilon]}\left(W^+(s)\right) ds.$$

Пусть $T = \min\{i > 0 : S_i \leq 0\}$ и символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, +\infty)$ с топологией Скорохода.

Теорема 1. *При* $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{\sigma \xi\left(\lfloor u\sigma\sqrt{n}\rfloor, n\right)}{\sqrt{n}},\ u \geq 0 \ \middle|\ T > n \right\} \xrightarrow{D} \left\{l^+(u,1),\ u \geq 0\right\}. \qquad (1)$$

При изучении различных моделей массового обслуживания, страхования и ветвящихся процессов особую роль играет *остановленное случайное блуждание* $\widetilde{S}_i = S_i$ при $i < T$ и $\widetilde{S}_i = 0$ при $i \geq T$.

Обозначим $\widetilde{\xi}(k)$ число попаданий блуждания $\left\{\widetilde{S}_i,\ i \geq 0\right\}$ в состояние $k \in \mathbf{N}$, т.е. $\widetilde{\xi}(k) = \left|\left\{i \geq 0 : \widetilde{S}_i = k\right\}\right|$. Величина $\widetilde{\xi}(k)$ называется *локальным временем* остановленного случайного блуждания на уровне k.

Теорема 2. *При* $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{\sigma\widetilde{\xi}\left(\lfloor u\sigma\sqrt{n}\rfloor\right)}{\sqrt{n}},\ u \geq 0 \;\middle|\; T > n \right\} \xrightarrow{D} \left\{l^{+}(u, +\infty),\ u \geq 0\right\}.$$

Снова рассмотрим стандартное броуновское движение $\{W(t),\ t \geq 0\}$. Пусть τ_x – момент первого достижения состояния x броуновским движением W, т.е. $\tau_x = \inf\{t > 0 : W(t) = x\}$. Введем следующие два момента достижения состояния 0 броуновским движением W. Один из них $\tau_0^{(1)}$ предшествует моменту τ_1, а другой $\tau_0^{(2)}$ следует за этим моментом:

$$\tau_0^{(1)} = \sup\{t \in [0, \tau_1] : W(t) = 0\},\ \tau_0^{(2)} = \inf\{t > \tau_1 : W(t) = 0\}.$$

Положим $T_0^{\uparrow} = \tau_0^{(2)} - \tau_0^{(1)}$. *Броуновским прыжком в высоту* называется случайный процесс, равный $W\left(\tau_0^{(1)} + t\right)$ при $t \in \left[0, T_0^{\uparrow}\right]$ и равный 0 при $t \geq T_0^{\uparrow}$. Обозначим этот процесс $\left\{W_0^{\uparrow}(t),\ t \geq 0\right\}$ и обозначим $l_0^{\uparrow}(u)$ его локальное время на уровне $u \in (0, +\infty)$, т.е.

$$l_0^{\uparrow}(u) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^{+\infty} I_{[u, u+\varepsilon]}\left(W_0^{\uparrow}(s)\right) ds.$$

Положим $T_x = \min\left\{i \in \mathbf{N} : \widetilde{S}_i > x\right\}$ при $x > 0$.

Теорема 3. *При* $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{\sigma^2\widetilde{\xi}\left(\lfloor un\rfloor\right)}{n},\ u \geq 0 \;\middle|\; T_n < +\infty \right\} \xrightarrow{D} \left\{l_0^{\uparrow}(u),\ u \geq 0\right\}.$$