О сильной аппроксимации некоторых типов случайных полетов

Баштова Е.Е.

Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \geq 0\}$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы, принимающие значения на единичной сфере в $\mathbb{R}^k$, а $\{T_n, n \geq 0\}$ — возрастающая последовательность случайных величин, не зависящая от ε ($T_0 = 0$). Случайным полетом называется непрерывный случайный процесс $X = \{X(t), t \geq 0\}$, траектория которого на участке $[T_{n-1}, T_n]$ ($n \geq 1$) линейна и ее направление задается реализацией случайного вектора ε_n. Такие процессы рассматривали еще Пирсон, Рэлей и Мандельброт, который ввел определение случайного полета Леви. В докладе устанавливается сильная гауссовская аппроксимация для двух классов случайных полетов. Для одного из них аппроксимирующий процесс получается Винеровским, и получена скорость сходимости, оптимальная в смысле Комлоша-Майора-Тушнади. Для другого класса, который строится по точечному Пуассоновскому процессу, аппроксимирующий процесс уже не Винеровский, однако на основе результатов из [4] удается оценить точность аппроксимации. Стоит отметить, что представленная теорема 2 является усилением части результатов, полученных в [3] и [5].

Переходя к формулировкам, напомним следующее определение ([1]).

Определение 1. Процесс $\{S(t), t \geq 0\}$, принимающий значения в $\mathbf{R}^d$, с покоординатно неубывающими, непрерывными справа и имеющими предел слева траекториями называется регенерирующим потоком, если существует возрастающая последовательность $\{\theta_i, i \geq 0\}$, $\theta_0 = 0$ такая, что последовательность

$$\{\kappa_j\}_{j=1}^{\infty} = \{S(\theta_{j-1} + t) - S(\theta_{j-1}), \theta_j - \theta_{j-1}, t \in [0, \theta_j - \theta_{j-1})\}_{j=1}^{\infty}$$

состоит из н.о.р. случайных элементов. Тогда последовательность $\{\tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}\}_{i=1}^{\infty}$ называется последовательностью периодов регенерации.

Пусть $N(t) = \min\{n \geq 0 : T_n > t\}, t \geq 0$. Мы предполагаем, что $\mathsf{E}\varepsilon_1 = 0$, $\mathsf{Var}\varepsilon_1 = \sigma_\varepsilon^2$.

Теорема 1. *Пусть $N(t)$ является регенерирующим потоком.*

1) *Если $\mathsf{E}e^{p\tau_i} < \infty$, для некоторого $p > 0$, то на одном вероятностном пространстве можно задать процесс X и d-мерный винеровский процесс $\{W_t, t \geq 0\}$ так что для всех $t \geq 1$, $x > 0$ и некоторых констант $a, b, c > 0$ выполняется*

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{u \leq t}\Big|X(u) - \sigma_\varepsilon\sqrt{\mathsf{E}\tau_1}W(u)\Big| > a\log t + x\Big) \leq be^{-cx}.$$

2) *Если* $\mathsf{E}\tau_i^p < \infty$, *для некоторого* $p > 2$, *то на одном вероятностном пространстве можно задать процесс* X *и* d-*мерный винеровский процесс* $\{W_t, t \geq 0\}$ *так что для всех* $t \geq 1$, $x > 0$ *и некоторой константы* $a > 0$ *выполняется*

$$\mathsf{P}\big(\sup_{u \leq t} \big| X(u) - \sigma_\varepsilon \sqrt{\mathsf{E}\tau_1} W(u) \big| > x\big) \leq atx^{-p}.$$

Теорема 2. *Пусть* $N(t) = \Pi(t^{1/\alpha})$, *где* Π - *стандартный пуассоновский процесс и* $\alpha > 1/2$. *На одном вероятностном пространстве можно задать процесс* X *и* d-*мерный винеровский процесс* $\{W_t, t \geq 0\}$ *так что для всех* $t \geq 1$, $x > 0$ *и некоторой константы* $C > 0$ *выполняется*

$$\mathsf{P}\left(\sup_{u \leq t} \left| X(u) - \alpha \sqrt{\frac{2}{2\alpha - 1}} W\left(u^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}\right) \right| > x\right) \leq Ct^{\gamma - \frac{\gamma-1}{\alpha}} x^{-\gamma}.$$

Здесь, если $\alpha \geq 1$, *то* $\gamma > 2$, *а если* $1/2 < \alpha < 1$, *то* $2 < \gamma < \frac{1}{1-\alpha}$.

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00487.

Литература

1. Afanasyeva, L.G., Bashtova, E.E.: Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server. Queueing Systems. V. 76, pp. 125–147 (2014)
2. Bashtova E., Shashkin A., Strong Gaussian approximation for cumulative processes, *Stochastic Processes and their Applications*, 2022, ISSN 0304-4149, https://doi.org/10.1016/j.spa.2022.04.003.
3. Davydov, Y., Konakov, V. Random Walks in Nonhomogeneous Poisson Environment. (2017) In: Panov, V. (eds) Modern Problems of Stochastic Analysis and Statistics. MPSAS 2016. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol 208. Springer, Cham. `https:// doi.org/10.1007/978-3-319-65313-6_1`
4. Зайцев А. Ю., “Точность сильной гауссовской аппроксимации для сумм независимых случайных векторов”, УМН, 68:4(412) (2013), 129–172;
5. Конаков В. Д., Фалалеев А. Р., “Сходимость некоторых классов случайных полетов в метрике Канторовича”, Теория вероятн. и ее примен., 65:4 (2020), 829–840;