О КОНСТРУКЦИИ ПЕРКИНСА В ЗАДАЧЕ ВЛОЖЕНИЯ СКОРОХОДА

А. А. Гущин[a] М. А. Недошивин[b]

[a] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия, e-mail: gushchin@mi-ras.ru
[b] МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, e-mail: mishiv96@gmail.com

Задача вложения Скорохода состоит в том, что по заданному распределению μ на $\mathbb{R}$ требуется построить на некотором пространстве, на котором задано броуновское движение $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$, момент остановки τ, для которого $\mathrm{Law}(B_\tau) = \mu$, и который обладает теми или иными желаемыми свойствами. В частности, Перкинс [1] в 1986 г. предложил конструкцию момента τ^*, для которого величина $\overline{B}_\tau$, где $\overline{B}_t := \sup_{s\leqslant t} B_s$ — текущий максимум процесса B, минимальна относительно стохастического порядка, т.е. $\mathsf{P}(\overline{B}_{\tau*} > \lambda) \leqslant \mathsf{P}(\overline{B}_\tau > \lambda)$ для всех $\lambda \geqslant 0$ и всех решений τ задачи вложения Скорохода. Перкинс предполагал, что распределение μ центрировано, общий случай (в том числе, когда μ не интегрируемо) был рассмотрен Коксом и Хобсоном [2].

В 1993 г. Роджерс [3] охарактеризовал класс Π всех возможных совместных распределений терминального значения п.н. сходящегося непрерывного локального мартингала, выходящего из 0, и его максимума. Эта характеризация позволяет разделить реализацию конструкции Перкинса на два шага. Обозначим π_1 и π_2 маргинальные распределения меры $\pi \in \Pi$. Первый шаг состоит в том, чтобы для любого одномерного распределения μ найти

$$\min_{\pi\in\Pi\colon\, \pi_1=\mu} \pi_2, \tag{1}$$

где минимум берется в смысле стохастического порядка. Если обозначить через π^* меру из Π, на которой достигается минимум, то второй шаг заключается в построении момента остановки τ^*, для которого $\mathrm{Law}(B_{\tau^*}, \overline{B}_{\tau^*}) = \pi^*$. Если первый шаг сделан, то результат Роджерса дает явный вид τ^*. Также было бы интересно получить явное выражение для τ^* из неявной конструкции для τ^* из работы [4] в сочетании с найденной в данной работе характеризацией оптимального распределения π^*, см. теорему ниже.

Итак, наша цель состоит в решении задачи (1). Следующие условия описывают класс Π совместных распределений терминального значения п.н. сходящегося непрерывного локального мартингала, выходящего из 0, и его максимума, см. [3], [4]:

$$\pi \in \Pi,$$

если

$$\pi((x,y)\colon y \geqslant 0,\ y \geqslant x) = 1,$$

$$\text{функция } \lambda \rightsquigarrow \lambda\pi(y>\lambda) + \int_{\{y\leqslant\lambda\}} x\,\pi(dx,dy) \text{ монотонно не убывает.}$$

Нам будет удобнее работать не с распределениями в $\mathbb{R}^2$, а с парами случайных величин (X,Y), которые предполагаются заданными на одном пространстве, которое может быть разным в разных местах. Предполагается, что задано распределение μ случайной величины X:

$$\mathrm{Law}(X) = \mu.$$

Исследование А. А. Гущина выполнено при поддержке РФФИ, грант 20-01-00646.

Требуется построить такое совместное распределение (X^*, Y^*), что $\mathrm{Law}(X^*, Y^*) \in \Pi$, $\mathrm{Law}(X^*) = \mu$ и для любого совместного распределения $\mathrm{Law}(X, Y) \in \Pi$ с маргинальным μ по первой координате, будет выполнено

$$\mathsf{P}(Y > \lambda) \geqslant \mathsf{P}(Y^* > \lambda), \quad \lambda \geqslant 0.$$

Для случайной величины X с $\mathrm{Law}(X) = \mu$ введем следующие обозначения:

$$F(x) := \mathsf{P}(X \leqslant x) \text{ — функция распределения } X,$$

$$Q(u) := \inf\{x\colon F(x) > u\}, \quad u \in (0,1), \text{ — верхняя квантильная функция } X,$$

$$J(x) := \int_0^x F(t)\,dt \text{ — интегральная функция распределения } X,$$

$$K(u) := \sup_{x\in\mathbb{R}}[xu - J(x)] \text{ — интегральная квантильная функция } X.$$

Функция K неотрицательна и выпукла, $\inf_u K(u) = 0$, $K(0) = \mathsf{E}(X^-)$, $K(1) = \mathsf{E}(X^+)$, $Q(u)$ совпадает с правой производной K в точке u для $u \in (0,1)$. Эти и другие факты можно найти в статье [5].

Зададим случайные величины X^* и Y^* на интервале $(0,1)$ с борелевской σ-алгеброй и мерой Лебега P. А именно, положим $X^*(u) = Q(u)$, $u \in (0,1)$, и определим $Y^*(u) = X^*(u)$, если $Q(u) \geqslant 0$. Если $Q(u) < 0$ и $u > 0$, то определим $Y^*(u)$ как единственный корень уравнения (с неизвестным λ)

$$\lambda(1+u) - J(\lambda) = K(u). \tag{2}$$

$Y^*(u)$ строго убывает и непрерывна, когда u меняется от 0 до $\sup\{u\colon Q(u) < 0\} = \mathsf{P}(X < 0)$, при этом $Y^*(u)$ изменяется от λ_0 до 0, где λ_0 — корень уравнения (2) при $u = 0$, если он существует, и $+\infty$ в противном случае; если $\lambda_0 < \infty$, то $\mathsf{E}(X \wedge \lambda_0) = 0$. Обратное к $Y^*(u)$ отображение обозначим $V^*(\lambda)$, $0 < \lambda < \lambda_0$.

Теорема 1 *Пусть задано распределение μ.*

1. *Для построенных выше случайных величин X^* и Y^* имеют место* $\mathrm{Law}(X^*) = \mu$ *и* $\mathrm{Law}(X^*, Y^*) \in \Pi$.
2. *Для любой пары (X, Y) случайных величин с* $\mathrm{Law}(X) = \mu$ *и* $\mathrm{Law}(X, Y) \in \Pi$

$$\mathsf{P}(Y > \lambda) \geqslant \mathsf{P}(Y^* > \lambda), \quad \lambda \geqslant 0.$$

3. *В классе Π существует единственное распределение с маргинальными* $\mathrm{Law}(X^*)$ *и* $\mathrm{Law}(Y^*)$*, а именно* $\mathrm{Law}(X^*, Y^*)$*. В частности, минимум в* (1) *достигается на единственной паре.*
4. *Оптимальная пара (X^*, Y^*) удовлетворяет п.н.*

$$X^* = \begin{cases} Y^*, & \text{если } X^* \geqslant 0; \\ Q(V^*(Y^*)) & \text{если } X^* < 0. \end{cases}$$

Обратно, если выполнено предшествующее соотношение и $\mathrm{Law}(X^*) = \mu$*, то* (X^*, Y^*) *— оптимальная пара.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Perkins E.* The Cereteli–Davis solution to the H^1-embedding problem and an optimal embedding in Brownian motion. — In: Seminar on stochastic processes, 1985, Progress in Probability and Statistics, **12**, Birkhäuser, Boston, 1986, p. 172–223.

2. *Cox A. M. G.*, *Hobson D. G.* An optimal Skorokhod embedding for diffusions. Stochastic Process. Appl., 2004, **111**, № 1, p. 17–39.

3. *Rogers L.C.G.* The joint law of the maximum and terminal value of a martingale, Probab. Theory Relat. Fields, 1993, **95**, № 4, p. 451–466.

4. *Гущин А. А.* Совместное распределение макс-непрерывного локального субмартингала и его максимума, Теория вероятн. и ее примен., 2020, **65**, № 4, с. 693–709.

5. *Gushchin A. A.*, *Borzykh D. A.* Integrated quantile functions: properties and applications, Modern Stochastics: Theory and Applications, 2017, **4**, № 4, p. 285–314.