© 2022 г. В.Л. ХАЦКЕВИЧ, д-р техн. наук (vlkhats@mail.ru)
(ВУНЦ ВВС ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж)

О МЕТОДЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ЗАДАЧЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

В данной работе рассматривается ситуация, когда на вход некоторого устройства A поступает непрерывный случайный сигнал $\eta(t)$, а на выходе наблюдается непрерывный случайный сигнал $\xi(t)$.

Устройство A называют линейной динамической системой, если связь между входом и выходом описывается дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами. Если на входе и выходе наблюдаются случайные сигналы $\eta(t)$ и $\xi(t)$ соответственно, то линейная динамическая система описывается дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве случайных величин с конечным вторым моментом

$$a_n\eta^{(n)}(t) + a_{n-1}\eta^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\eta'(t) + a_0\eta(t)$$
$$= b_k\xi^{(k)}(t) + b_{k-1}\xi^{(k-1)}(t) + \ldots + b_1\xi'(t) + b_0\xi(t) \equiv f(t). \qquad (1)$$

Здесь коэффициенты $a_i (i = 0, \ldots, n)$ и $b_i (i = 0, \ldots, k)$ – постоянные числа.

Известный [1, гл. 8] подход при изучении динамической системы (1) состоит в предположении стационарности (в широком смысле) входных и выходных случайных сигналов и использовании частотностной характеристики. Он связан с прямым и обратным преобразованием Фурье случайных процессов. Наш подход, использующий метод функции Грина, не предполагает стационарности входного и выходного случайных сигналов.

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = h(t). \qquad (2)$$

Имеет место

Лемма 1 ([2], гл. I, §8). *Пусть корни характеристического уравнения* $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$ *не содержат точек мнимой оси. Тогда для любой непрерывной ограниченной на всей оси функции h(t) уравнение (2) имеет ограниченное на всей оси решение, причем единственное. Оно дается формулой*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G\,(t-s) f(s) ds, \qquad (3)$$

где $G(t)$ *– функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (2).*

Замечание 1. Пусть в условиях леммы 1 все корни характеристического уравнения лежат в левой полуполоскости (Re $\lambda_i < 0 \ i = 1, \dots, n$*). Тогда ограниченное решение уравнения (2) асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Связь между математическими ожиданиями входного и выходного случайных сигналов характеризует

Теорема 1. *Пусть входной случайный процесс* $f(t)$ *ограничен на всей числовой оси, а корни характеристического уравнения* $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ *не содержит точек мнимой оси. Тогда математическое ожидание* $M\eta(t)$ *случайного процесса на выходе динамической системы (1) представимо в виде*

$$M\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G\,(t-s)Mf(s)ds, \tag{4}$$

где G *– функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (2).*

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 1 на вход поступает «квазистационарный» сигнал, т.е. $M\xi(t) = m_\xi = const$. *Тогда на выходе также будет «квазистационарный» сигнал, причем его математическое ожидание* $M\eta(t) = m_\eta = \frac{b_0}{a_0} m_\xi$.

Связь между корреляционной функцией $K_\eta(t_1, t_2)$ случайного сигнала на выходе динамической системы (1) и корреляционной функции $K_\xi(t_1, t_2)$ случайного сигнала на входе характеризует

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны (Re* $\lambda_i < 0 \ i = 1, \dots, n$*). Тогда корреляционная функция* $K_\eta(t_1, t_2)$ *случайного сигнала* $\eta(t)$ *на выходе динамической системы (1) определяется формулой*

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} G(t_1-\tau_1)\,G(t_2-\tau_2)K_f(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2, \tag{5}$$

где $K_f(\tau_1, \tau_2)$ *– корреляционная функция входного сигнала* $f(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i \xi^{(i)}(t)$*, а* G *– функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (2).*

Пример 1. На вход интегрирующей RC-цепочки, описываемой дифференциальным уравнением

$$\eta'(t) + \beta\eta(t) = \beta\xi(t), \beta = \frac{1}{RC} > 0 \tag{6}$$

поступает непрерывный случайный ограниченный на всей оси сигнал $\xi(t)$ с математическим ожиданием $M\xi(t)$.

Заметим, что функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (6) имеет вид

$$G_1(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} \text{ при } t > 0; \\ 0 \quad\;\; \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Тогда математическое ожидание $M\eta(t)$ на выходе динамической системы (6), согласно теореме 1 представляется формулой

$$M\eta(t) = \beta \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)}\, M\xi(s)ds.$$

Корреляционная функция $K_\eta(t_1, t_2)$ на выходе динамической системы (6) связана с корреляционной функцией $K_\xi(t_1, t_2)$ на входе согласно теореме 2 формулой

$$K_\eta(t_1, t_2) = \beta^2 e^{-\beta(t_1+t_2)} \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} e^{\beta(\tau_1+\tau_2)} K_\xi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1\, d\tau_2.$$

Пример 2. На вход линейной динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\eta''(t) + 4\eta'(t) + 3\eta(t) = \xi(t) \qquad (7)$$

поступает непрерывный случайный ограниченный на всей оси сигнал $\xi(t)$. Укажем характеристики выходного случайного сигнала $\eta(t)$.

Заметим, что корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ имеют вид $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$. Тогда в соответствии с теоремой 1

$$M\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} G_2\,(t-s) M\xi(s)ds,$$

где функция Грина G_2 задачи об ограниченных решениях имеет вид

$$G_2(t) = \begin{cases} \left(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}\right)(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \text{ при } t > 0; \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Корреляционные функции входного и выходного случайных сигналов динамической системы (7) в соответствии с теоремой 2 связаны соотношением

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} G_2(t_1 - \tau_1)\, G_2(t_2 - \tau_2) K_\xi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и их инженерные приложения. М.: Кнорус, 2016. 439 с.

2. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 351 с.