ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДРОБНЫХ АБСТРАКТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Илолов М., Рахматов Дж.Ш.Лашкарбеков С.М.[2]
ilolov.mamadsho@gmail.com

Задача Коши для дробных абстрактных стохастических дифференциальных уравнений

Пусть H сепарабельное гильбертово пространство и A действующий в нем почти секториальный оператор порждающий аналитическую полугруппу $T(t)$.

Рассмотрим в H дробную задачу Коши

$$D_t^\alpha X(t) = (AX(t)+F(t,X(t)))dt^\alpha+b(t,X(t))dW(t), t\in[0,1], X(0)=\xi, \tag{1}$$

где D_t^α - дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0<\alpha<1$, $W(t)$ - винеровский процесс со значениями в некотором другом сепарабельном векторном пространстве H^1. $F(t,X)$ - отбражение из H в H, $B(t,X)$ - оператор действующий из H в пространстве линейных операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{L}_{HS}(H_Q^1, H)$.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - вероятностная тройка с нормальной фильтрацией $\mathfrak{F}_t, t\geq 0$.

С почти секториальным оператором T связаны следующие три семейства операторов, а именно

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{-tz}R(z,A)Dz, t\geq 0 \tag{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma E_\alpha(-zt^\alpha)R(z,A)Dz, t\geq 0 \tag{3}$$

$$P_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e_\alpha(-zt^\alpha)R(z,A)Dz, t\geq 0 \tag{4}$$

где контурный интеграл Γ ориентирован против часовой стрелки, $E_\alpha(z), e_\alpha(z)$ - функции Миттаг-Леффлера, $0<\alpha<1, z\in\mathbb{C}$.

[1]М. Илолов, Дж.Ш. Рахматов, С.М. Лашкарбеков

Запишем задачу Коши (1) в интегральной форме

$$X(t) = \xi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[Ax(s) + F(s, X(s))]ds +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} B(s, X(s)) dW(s),$$

где X-искомый H-значный случайный предсказуемый процесс, ξ – $\mathfrak{F}_0$-измеримая H значная случайная величина, A почти секториальный оператор порождающий семийства операторов (2), (3), (4); отображение $F(t, X(t)) : H \to H$; Q-неотрицательный оператор следа в H^1 такой, что $Qe_j = \sigma_j^2 e_j, \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$; оператор $B(t, X(t))$ - оператор Гильберта-Шмидта из пространства $H_Q^1 = Q^{1/2}H^1$ с нормой $\|h\|_Q = \|Q^{-1}h\|_{H^1}$ в пространство H, далее пространство операторов Гильберта-Шмидта из H_Q^1 в H будем обозначать $\mathfrak{L}_{HS}$; $W(t), t \geq 0 - H^1$ - значный Q - винеровский процесс.

При фиксированном $T > 0$ заданы следующие условия на коэффициенты F, B:

(i) отображение $F : [0, T] \times \Omega \times H \to H$, $(t, \omega, x) \to F(t, \omega, x)$ измеримо из $(\Omega_T \times H, \mathfrak{P}_T \times \mathfrak{B}(H))$ в $(H, \mathfrak{B}(H))$;

(ii) отображение $B : [0, T] \times \Omega \times H \to \mathfrak{L}_{HS}$, $(t, \omega, x) \to B(t, \omega, x)$ измеримо из $(\Omega_T \times H, \mathfrak{P}_T \times \mathfrak{B}(H))$ в $(\mathfrak{L}_{HS}, \mathfrak{B}(\mathfrak{L}_{HS}))$;

(iii) существует такая постоянная $c > 0$ что $F(\cdot)$ и $B(\cdot)$ удовлетворяют условиям Липшица и линейного роста:

$$\begin{cases} \|F(t,\omega,x) - F(t,\omega,y)\|_H + \|B(t,\omega,x) - B(t,\omega,y)\|_{\mathfrak{L}} \leq C\|x-y\|_H, \\ \|F(t,\omega,x)\|_H^2 + \|B(t,\omega,x)\|_{\mathfrak{L}_{HS}}^2 \leq C^2(1 + \|x\|_H^2), \end{cases} \tag{5}$$

где $x, y \in H, t \in [0, T], \mathfrak{P}_T$ - предсказуемая σ-алгебра на $\Omega_T = [0, T] \times \Omega$.

Предсказуемый H-значный процесс $X(t), t \in [0, T]$ называется слабым решением задачи Коши (1), если

$$P\left(\int_0^t \|x(s)\|^2 ds \leq \infty\right) = 1$$

для почти всех ω, для любого $t \in [0, T]$ и для любого $y \in D(A^*)$ справедливо равество

$$< y, X(t) > = < y, \xi > + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [< A^* y, X(s) > + < y, F(s, X(s)) >] +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t < y, B(s, X(s)) > DW(s). \quad (7)$$

Предсказуемый H-значный процесс $X(t), t \in [0, T]$ называется мягким решением задачи Коши (1), если выполнены (1) и (6), и кроме того, $X(t)$ для любого $t \in [0, T]$ удовлетворяет уравнению

$$X(t) = S_\alpha(t)\xi + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) F(s, X(s)) ds +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) B(s, X(s)) dW(s). \quad (8)$$

Теорема 1. *Пусть $\xi - \mathfrak{F}_0$-измеримая H-значная случайная величина и условия (i)-(iii) выполнены. Тогда существует мягкое решение X задачи (1) единственное с точностью до эквивалентности среди процессов, удовлетворяющих условию (6).*

Теорема 2. *Пусть X H-значный предсказуемый процесс с интегрируемыми траекториями, оператор A порождает семейства ограниченных операторов (2), (3), (4), оператор $F(s, X(s))$ - отображение из H в H, оператор $B(s, X(s))$ удовлетворяет условию существования интеграла Ито, то есть*

$$E \int_0^t \|(t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) B(s, X(s))\|^2 \mathfrak{L}_{HS}(H_Q^1, Q) < \infty.$$

Если для любого $t \in [0, T]$ и $y \in D(A^*)$ решение $X(t)$ удовлетворяет равенству (7), тогда $X(t)$ удовлетворяет равенству (8) и обратно.

В детерминированном случае абстрактная задача Коши с почти секториальными операторами подробно изучена в [1]. Абстрактные стохастические уравнения с целыми порядками производных и их приложения рассматриваются в [2], [3].

Литература

1. Rong-Nian Wang, De Han Chen, Ti-Jun Xiao. Abstract fractional Cauchy problem with almost sectorial operators / Rong-Nian Wang, De

Han Chen, Ti-Jun Xiao.//J.Differential Equations — 2012. — № 252. — pp. 202–235.

2. Старкова О.С. Стохастическая задача Коши в гильбертовом пространстве: модели, примеры, решения / О.С. Старкова // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и програмирование"(Вестник ЮУрГУ ММГ) — 2016. — № 9(4). — С. 63–72.

3. 9. Ilolov M., Kuchakshoev K.S., Rahmatov J.Sh. Fractional stochastic evolution equations: Whitenoise model /M. Ilolov, K.S. Kuchakshoev, J.Sh. Rahmatov// Communications in Stochastic Analysis — 2020 —№ 14(3-4) — pp. 55-69