Амбит, траловые и ПСИ стохастические процессы

Олег Витальевич Русаков, Юрий Владимирович Якубович
Санкт-Петербургский государственный университет, мат-мех

Положим, что все рассматриваемые случайные объекты заданы на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$. Рассмотрим триплет $\{(\xi), \Pi(t), \lambda\}$, состоящий из независимых элементов: $(\xi) = \xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность случайных величин; $\Pi(t)$, $t \geq 0$, — стандартный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью; λ — неотрицательная (п.н.) случайная величина, которая будет играть роль случайной интенсивности.

Определение 1. *Рассмотрим следующую рандомизацию времени последовательности* (ξ)

$$\psi(t) = \psi_\lambda(t) \stackrel{\triangle}{=} \xi_{\Pi(\lambda t)}, \qquad t \in \mathbb{R}_+ . \tag{1}$$

Полученный процесс ψ назовем процессом Пуассоновского случайного индекса (процессом ПСИ, или ПСИ-процессом для кратости). Последовательность (ξ) мы назовем «подчиненной», а независимый от нее процесс $\Pi(\lambda t)$ — «управляющим», или «ведущим».

Заметим, что если подчиненная последовательность (ξ) стационарна, то ПСИ-процесс ψ тоже стационарен. В данной работе мы ограничимся случаем, когда подчиненная последовательность (ξ) состоит из независимых одинаково распределенных членов, что, в частности, даст стационарность соответствующего ПСИ-процесс ψ. Отметим, что при этом предположении о последовательности (ξ) ПСИ-процесс ψ не будет иметь независимых приращений.

Лемма 1. *Допустим, что элементы подчиненной последовательности (ξ) независимы одинаково распределены, имеют $\mathbf{E}\xi_0 = 0$, $\mathbf{D}\xi_0 = 1$. Тогда для всяких неотрицательных t, v ковариация процесса ψ_λ есть преобразование Лапласа для случайной интенсивности λ,*

$$\operatorname{cov}(\psi(v), \psi(v+t)) = \mathbf{E}\exp\{-\lambda(\omega)t\} \stackrel{\triangle}{=} L_\lambda(t) . \tag{2}$$

Детали доказательства Леммы 1 см. в [1].

Пусть выполнены условия Леммы 1. Рассмотрим независимые копии ПСИ-процесса ψ: $\psi_1, \psi_2, \ldots$ (предполагается, что все соответствующие триплеты $\{(\xi)_j, \Pi_j(t), \lambda_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ совокупно независимы). Образуем нормированные суммы

$$Z_N(t) \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \psi_j(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+ . \tag{3}$$

Теорема 1. *При $N \to \infty$ последовательность $Z_N(t)$ сходится в смысле слабой сходимости конечномерных распределений к центрированной гауссовской стационарной случайной функции $Z(t)$, $t \geq 0$, имеющей ковариацию $L_\lambda(t)$.*

В случае, когда интенсивность $\lambda > 0$ является константой, имеет место функциональная предельная теорема.

Теорема 2. *При $N \to \infty$ последовательность $Z_N(t)$ сходится в пространстве Скорохода непрерывных справа, имеющих конечные пределы слева функций, заданных на компакте $[0, T] \ni t$, к процессу Орнштейна-Уленбека (стационарному, гауссовскому, марковскому) с ковариацией* $\exp\{-\lambda t\}$.

Доказательство Теоремы 1 напрямую следует из ЦПТ для векторов. Доказательство Теоремы 2 приведено в [2].

Для описания пределов нормированных сумм независимых одинаково распределенных ПСИ-процессов, их пределов в схеме серий и/или их пределов в смысле нормированных сумм нам потребуется понятие «амбит множества», «амбит» процесса и частного случая «тралового» (*trawl*) процесса. Одна из причин такой необходимости заключается в том, что для адекватного описания поведения стохастического процесса приходится добавлять еще одно измерение. Понятие «амбит» восходит к латинскому *ambitus*, что означает граница, ограниченность, сфера влияния. Суть амбит идеологии стохастической модели заключается в том, что значение случайного элемента в точке (x, t) пространства времени определяется только так называемым «амбит-множеством» $A_t(x)$, которое содержит точку (x, t). С деталями можно подробно ознакомиться в [3]. Для описания тралового процесса нам потребуется ключевое определение базиса Леви ([3] Def 25, p.155).

Определение 2. *Базис Леви $\mathcal{L}$, заданный на $S \subseteq \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, есть стохастическая мера (возможно со знаком) с независимыми приращениями (independently scattered), заданная на ограниченных борелевских множествах $\mathcal{B}_b(S)$, имеющая безгранично делимое распределение на каждом $A \in \mathcal{B}_b(S)$, обладающая следующими тремя свойствами.*

1. Для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots$ из $\mathcal{B}_b(S)$, таких что $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}_b(S)$ выполнено п.н.

$$\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{L}(A_2) + \cdots = \mathcal{L}\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right), \tag{4}$$

где предел в правой части равенства (4) понимается в смысле п.н.

2. Для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots$ из $\mathcal{B}_b(S)$ соответствующие случайные величины $\mathcal{L}(A_1), \mathcal{L}(A_2), \dots$ независимы.

3. Для каждого $A \in \mathcal{B}_b(S)$ распределение $\mathcal{L}(A)$ принадлежит классу безгранично делимых распределений.

В случае, когда структурная мера (*control measure*, — e.g. Def.32, [3], p.162) для $\mathbb{R}_+$-значного базиса Леви $\mathcal{L}$ есть мера Лебега в определении 2 базиса Леви множество $\mathcal{B}_b(S)$ можно заменить на множество $\mathcal{B}_{Leb}(S)$ — борелевских множеств S, имеющих конечную меру Лебега. Коль скоро значения $\mathcal{L}(A)$, $A \in \mathcal{B}_b(S)$, имеют безгранично делимое распределение, то выписывается формула Леви-Хинчина для кумулянты (см.[3], Утверждение 30 стр.161). Далее там же на стр.162 утверждается, что формула для кумулянты не изменится, если взять $A \in \mathcal{B}_{Leb}(S)$. Это дает возможность определять базис Леви в данном случае. Для ряда неограниченных множеств $A \in \mathcal{B}_{Leb}(S)$ детали приводятся в [4]. Там же (т.е. в [4]), видимо, впервые появился термин «амбит-множество». Обсуждение такой замены (в определении базиса Леви) $\mathcal{B}_b(S)$ на $\mathcal{B}_{Leb}(S)$ см. в [3], стр.156.

Определение 3. Траловый процесс. *Пусть $S = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, где первый сомножитель прямого произведения трактуется как пространство (размерности d), а второй — как время. Путь $\mathcal{L}$ есть $\mathbb{R}_+$-значный однородный базис Леви, определяемый структурной мерой Лебега. Под однородностью базиса Леви мы понимаем, что распределение $\mathcal{L}(C)$ не зависит от сдвига множества $C \in \mathcal{B}_{Leb}$ в S. Пусть $A = A(0) \subset \mathbb{R}^d \times (-\infty, 0]$ — «начальное амбит-множество», имеющее конечную меру Лебега, называемое «тралом» (trawl). Рассмотрим монотонное семейство сдвигов вдоль оси времени, задаваемое отрезками (с открытыми концами) вида $(\mathbf{0}, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ и положим $A(t) = A(0) + (\mathbf{0}, t)$. Семейство $(A(t))$ образует «монотонный поток амбит-множеств». Определим траловый процесс:*

$$Y(t) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{L}(A(t))\,. \tag{5}$$

В (5) мы по умолчанию будем предполагать, что $t \geq 0$. В то же время очевидна стационарность тралового процесса $Y(t)$, поэтому мы при необходимости всегда можем положить $t \in \mathbb{R}$. Индикаторные функции для семейства $(A(t))$ назовем «скользящим ядром для тралового процесса».

В дальнейшем будем полагать, что $d = 1$. Рассмотрим «специальные амбит-множества» вида

$$A_\eta(t) \overset{\triangle}{=} \{(x,s) : s \le t,\ 0 \le x \le \eta(s-t)\}, \quad t \ge 0, \tag{6}$$

где η — неубывающая непрерывная положительная функция, заданная на левой полуоси. Рассмотрим соответствующий траловый процесс $Y_\eta(t) \overset{\triangle}{=} \mathcal{L}(A(t))$, $t \ge 0$.

Теорема 3. *Рассмотрим последовательность $(\xi_0(N))_{N\in\mathbf{N}}$ — начальные члены тотально независимых одинаково распределенных ПСИ-процессов $(\psi_N(t))_{N\in\mathbf{N}}$, $t \ge 0$. Пусть независимые ведущие процессы имеют случайные независимые одинаково распределенные интенсивности, распределения которых заданы положительной (п.н.) случайной величиной λ. Допустим, что: 1) распределение $\xi_0(1)$ принадлежит области притяжения некоторого α-устойчивого закона, либо 2) $\xi_0(1)$ имеет безгранично делимый закона отличный от α-устойчивого. Тогда в случае 1) подходящим образом нормированные суммы ПСИ-процессов сходятся в смысле слабой сходимости конечно-мерных распределений к траловому процессу $Y_\eta(t)$ с базисом Леви, имеющим заданное распределение α-устойчивого закона; в случае 2) следует рассмотреть схему серий (независимых одинаково распределенных ПСИ-процессов), дающую слабый предел начального значения $\xi_0(1)$, и тогда соответствующий предел (в смысле сходимости конечно-мерных распределений) ПСИ-процессов будет $Y_\eta(t)$ с базисом Леви, имеющим исходный безгранично-делимый закон распределения.*

При этом, как для случая 1), так и для случая 2) наша функция $\eta(s) = \mathrm{d}(1 - L_\lambda(-s))/\mathrm{d}s$, где L_λ — преобразование Лапласа случайной интенсивности λ.

Доказательство Теоремы 3 основывается на детальной работе с кумулянтами и представлением Леви-Хинчина.

Замечание 1. *Пусть $\lambda > 0$ — неслучайна. Тогда мы в Теореме 3 имеем в качестве предела обобщение процесса Орнштейна-Уленбека на случай безгранично-делимого распределения. Данное обобщение отличается от авто-регрессионой схемы, оно введено в 2005 году в [5] и названо «верхнелестничным представлением процесса Орнштейна-Уленбека» (Upstairs representation of the Ornstein-Uhlenbek process). Забавно, что автор работы [4], где он ввел понятие «тралового процесса» в 2011 году, в книге [3] пишет, что он тогда, т.е. в 2011 году, не знал о работе [5] 2005-го года.*

Замечание 2. *Функция η имеет вид экспоненты тогда и только тогда, когда $\lambda > 0$ — неслучайна. Более того, функция η является плотностью распределения величины $-\zeta$, где ζ показательно распределена с интенсивностью $\lambda > 0$. Траловый процесс $Y_\eta(t)$ марковский только в этом случае и только для гаусского, либо пуассоновского базиса Леви на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.*

Благодарности. Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00646 (A).

Литература.

[1] О.В. Русаков *Псевдо-пуассоновские процессы со стохастической интенсивностью и класс процессов, обобщающих процесс Орнштейна–Уленбека // Вестн. С.-Петерб. ун-та.* Сер. 1. Т. 4(62). Вып. 2, С. 247–257, 2017.

[2] О.В. Русаков *Относительная компактность сумм независимых одинаково распределенных псевдопуассоновских процессов в пространстве Скорохода. Зап. научн. сем. ПОМИ.* Том 442, 122–132, 2015.

[3] O.E. Barndorff-Nielsen, F.E. Benth, and A.E.D. Veraart *Ambit Stochastics* Springer, New York, Probability Theory and Stochastic Modelling Volume 88, 2018, 402p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-94129-5

[4] O. E. Barndorff-Nielsen *Stationary infinitely divisible processes // Brazilian Journal of Probability and Statistics* 25, 294–322, 2011.

[5] R. L. Wolpert, M. S. Taqqu *Fractional Ornstein-Uhlenbeck Lévy Processes and the Telecom Process: Upstairs and Downstairs // Signal Processing* Vol. 85(8), 1523–1545, 2005.