Банаховы пределы и приложения

Е. М. Семенов (Воронеж)

Через ℓ_∞ обозначается пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с нормой
$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$
и обычной полуупорядоченностью. Линейный функционал $B \in \ell_\infty^*$ называется банаховым пределом, если

1. $B \geqslant 0$, т. е. $Bx \geqslant 0$ для всех $x \geqslant 0$,
2. $B\mathbb{1} = 1$, где $\mathbb{1} = (1, 1, \ldots)$,
3. $Bx = BTx$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T – оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

Существование банаховых пределов было анонсировано в статье Мазура (1929 г.), а доказательство приведено в книге Банаха. Множество банаховых пределов, которое мы обозначаем через $\mathfrak{B}$, есть замкнутое выпуклое множество на единичной сфере пространства ℓ_∞^*. Эберлейн доказал существование банаховых пределов, инвариантных относительно регулярных преобразований Хаусдорфа. Обозначим через Γ множество линейных операторов в ℓ_∞ таких, что

1. $H \geqslant 0$ и $H\mathbb{1} = \mathbb{1}$;
2. $Hc_0 \subset c_0$;
3. $\limsup\limits_{j\to\infty} (A(I-T)x)_j \geqslant 0$ для всех $x \in \ell_\infty$, $A \in \operatorname{conv}\{H^n, n \geqslant 0\}$.

Сформулированные выше классические результаты усиливает

Теорема 1. Существует $B \in \mathfrak{B}$, инвариантный относительно оператора $H \in \Gamma$, т. е. $Bx = BHx$ для всех $x \in \ell_\infty$.

Условиям 1 – 3 удовлетворяют операторы Чезаро
$$(Cx)_n = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right\},\ n = 1, 2, \ldots$$
и операторы растяжения
$$\sigma_n(x_1, x_2, \ldots) = (\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{n}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{n}, \ldots).$$

Приложения теории банаховых пределов относятся к теории операторов, сингулярным следам, теории вероятностей, ортогональным рядам и другим разделам математики. Совместная работа с Ф. А. Сукочевым (университет Сиднея, Австралия).