ВИРТУАЛЬНЫЕ ВРЕМЕНА ОЖИДАНИЯ В МОДЕЛИ КЛЕЙНРОКА

Симонян А.Р., Улитина Е.И.

Рассмотрим систему $M_r|G_r|1|\infty$ с интенсивностями входящих потоков $a_1>0,\cdots,a_r>0$. Длительности обслуживания вызовов имеют функцию распределения $B_k(x), B_k(+0)=0,\ k=\overline{1,r}$.

В момент времени $t=0$ система свободна от вызовов. Пусть модель $M_r|G_r|1|\infty$ с дисциплиной Клейнрока. [1-3].

Рассмотрим виртуальные времена ожидания (ВВО) k –вызова, обозначим через $w_k(t)$) в момент времени t [3]. Задача нахождения ФР ВВО $w_k(t)$, $k=\overline{1,r}$, $t\geq 0$, является главной задачей [4-5].

В настоящей работе предложен новый метод анализа $w_k(t)$, $k=\overline{1,r}$, $t\geq 0$.

Обозначим

$$b_k=\int_0^\infty x dB_k(x),\quad a_{ik}=a_i\cdot\left[1-\frac{b_{k+1}}{b_i}\right],\quad \sigma_k=\sum_{i=1}^k a_{ik},\ i=\overline{1,k},\quad k=\overline{1,r},\quad b_{r+1}=0,$$

$$\beta_k(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dB_k(x),\quad \omega_k(s,t)=Ee^{-s\omega_k(t)},\quad m_k(s)=s+\sigma_k-\sigma_k\cdot\pi_k(s),\quad s\geq 0,\qquad t\geq 0,$$

E–знак математического ожидания, а функция $\pi_k(s)$ –минимальный корнь функционального уравнения

$$\sigma_k\cdot x=\sum_{i=1}^k a_{ik}\cdot\beta_i(s+\sigma_k-\sigma_k\cdot x).$$

При $k=\overline{1,r}$, $s\geq 0$, $t\geq 0$ справедливы равенства [5]

$$\omega_k(s,t)=\overline{\omega}_k(m_{k-1}(s),t), \tag{1}$$

где $\overline{\omega}_k(s,t)=E\exp(-s\overline{\omega}_k(t))$ и $\overline{\omega}_k(t)$ есть $\omega_k(t)$ при условии прекращения доступа в систему вызовов после момента t.

При $k=\overline{1,r}, j=\overline{k,r}$ и $s\geq 0$ положим

$$p_k(s)=s-\sum_{i=1}^k a_i\cdot(1-\beta_i(s)),\qquad p_k^j(s)=s-\sum_{i=1}^k a_{ij}\cdot(1-\beta_i(s)).$$

Теорема 1. При любых $k=\overline{1,r}$, $t\geq 0$, $s\geq 0$ имеют место

$$\overline{\omega}_k(s,t)=e^{p_k(s)t}\left\{1-s\cdot\int_0^t e^{-p_k(s)u}P(u)du-\sum_{j=k+1}^r a_j\cdot(1-\beta_j(s))\cdot\int_0^t e^{-p_k(s)v}dv\times\right.$$
$$\left.\times\int_0^{\frac{b_k}{b_k-b_j}(t-v)} e^{-p_k^{j-1}(s)u}\,d_uP(w_j(v)<u)\right\}, \tag{2}$$

где P – знак вероятности и

$$\int_0^\infty e^{-st}P(t)dt=(m_r(s))^{-1},\quad s\geq 0. \tag{3}$$

Уравнения (1)-(3) дают полную информацию о $w_k(t)$, $k=\overline{1,r}$, $t\geq 0$.

В часности из (2) при $k=r$ имеем

$$\omega(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\omega}_r(s,t) = e^{p_r(s)t}\left\{1 - s \cdot \int_0^t e^{-p_r(s)u} P(u)du\right\}, \quad t \geq 0, \quad s \geq 0. \tag{4}$$

Теорема 2. При любых $k = \overline{1,r}$, $t\geq 0$, $s\geq 0$ справедливы равенства

$$\overline{\omega}_k(s,t) = \omega(s,t) +$$

$$+\sum_{j=k+1}^{r} a_j \left(1 - \beta_j(s)\right) \sum_{n=k+1}^{j} \int_0^t e^{p_{n-1}(s)y} dy \int_{\frac{b_{n-1}}{b_{n-1}-b_j}y}^{\frac{b_n}{b_n-b_j}y} e^{-p_{n-1}^{j-1}(s)u}\, d_u P(w_j(t-y) < u). \tag{5}$$

Уравнения (4), (5) также дают полную информацию о $w_k(t)$, $k = \overline{1,r}$, $t\geq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередьями. – М. Мир, 1979, 600 с.
2. Даниелян Э.А. Об одной системе с динамическими приоритетами//Ученые записки ЕГУ, 3, 1980, с.19-25.
3. Симонян А.Р., Улитина Е.И., Сунцова М.А. Об одной теореме для виртуальных времен ожидания в модели Клейнрока// Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15. № 3. С. 518-519.
4. Bagchi U., Sullivan R.S. Dynamic Non-Preemptive Queues with General Linearlily Increasing Priority Function//Opns. Res., 1985, p.1278-1298.
5. Danielian E.A., Lieze F. The Analysis of a Mr|Gr|1|∞ Model with Time Dependent Priorities//Rostock. Math. Kolloq., 43, 1991, p.39-54