Предельное поведение порядковых статистик на длинах циклов случайных A-подстановок

А.Л. Якымив*
Математический институт им. В.А. Стеклова

Зафиксируем некоторое множество натуральных чисел A. Через $T_n(A)$ обозначим множество подстановок степени n, длины циклов которых принадлежат множеству A (так называемых A-подстановок). Рассматривается случайная подстановка τ_n, равномерно распределённая множестве $T_n(A)$. Пусть ζ_n - общее число циклов и $\eta_n(1) \leq \eta_n(2) \leq \cdots \leq \eta_n(\zeta_n)$ - вариационный ряд длин циклов подстановки τ_n. Мы будем предполагать, что

$$p(n) \equiv \frac{|T_n(A)|}{n!} = n^{\varrho-1}L(n), \ n \in N, \tag{1}$$

где $\varrho > 0$ и последовательность $L(n)$ медленно меняется на бесконечности. Как известно [4], отсюда следует, что у множества A существует положительная асимптотическая плотность ϱ во множестве натуральных чисел, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|k: \ k \in A, \ k \leq n|}{n} = \varrho > 0. \tag{2}$$

Зафиксируем действительное x и положим при $m \in N$ и $t > 0$

$$r = \exp\left(\frac{m}{\varrho} + x\frac{\sqrt{m}}{\varrho}\right), \quad l(t) = \sum_{i\in A, i\leq t} 1/i.$$

Теорема 1 *Предположим, что выполнено (1), и пусть последовательность $m = m(n) \to \infty$ такова, что*

$$\frac{\varrho \ln n - m}{\sqrt{\ln n}} \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

Тогда

$$\mathsf{P}\{\varrho \ln \eta_n(m) \leq m + x\sqrt{m}\}$$
$$= \Phi(z) + \frac{1}{405 l^{3/2}(r)}(10\Phi^{(3)})(z) + \Phi^{(5)}(z)) + O\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00111-П, https://rscf.ru/project/19-11-00111/ .

где

$$z = y - \frac{1}{108\mu}(y^3 - y),$$

$$y = 3\sqrt{\mu}\left(\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{1/3} - \frac{1}{9\mu} - 1\right), \ \mu = m+1, \ \nu = l(r).$$

Здесь $\Phi(\cdot)$ - функция стандартного нормального распределения.

Рассмотрим некоторые примеры, когда выполнено (1). Наиболее ёмким из них является следующий.

Пример 1 *Предположим, что множество A не находится на решётке с шагом, большим 1 и у него существует положительная асимптотическая плотность во множестве натуральных чисел, равная ϱ, т.е., выполнено (2). Тогда имеет место (1).*

Пример 2 *Пусть $M \in N, \ 1 \le i \le M, \ A_i = \{m \in N : \ m = a_i k + b_i, \ k = 0, 1, 2, \dots\}$, где целые $a_i > 1, \ 1 \le b_i \le a_i - 1, \ (a_i, b_i) = 1, \ A = \bigcup_{i=1}^{M} A_i$, прогрессии A_i и A_j при $i \ne j$ не пересекаются.Тогда (см. работу А.И. Павлова [2]) выполнено (1).*

Пример 3 *Пусть $k_1, \dots, k_s \in N$ таковы, что:*

1. $k_i \ge 2, \ i = 1, \dots, s$;
2. $(k_i, k_j) = 1$ *при* $i \ne j$.

Положим $A = \{m \in N : \ k_i \nmid m, \ i = 1, \dots, s\}$. Тогда (см. работу А.И. Павлова [2]) выполнено (1).

Множества из примера 1 были рассмотрены в книге Тимашёва [3] (2016), а множества из примеров 2 и 3 введены в статье Болотникова, Сачкова и Тараканова [1] (1976). В этих работах исследовались некоторые другие свойства случайных подстановок с длинами циклов из этих множеств.

Список литературы

[1] Болотников Ю.В., Сачков В.Н., Тараканов В.Е. Асимптотическая нормальность некоторых величин, связанных с цикловой структурой случайных подстановок.- Матем. сб., 1976, т. 99, № 1, с. 121-133.

[2] Павлов А.И. О числе подстановок с длинами циклов из заданного множества, Дискрет. матем., 3:3 (1991), 109–123.

[3] Тимашев А.Н. Распределения типа степенного ряда и обобщенная схема размещения, Академия, М., 2016.

[4] Якымив А.Л. Распределение длины m-го максимального цикла случайной A-подстановки.- Дискретная математика, 2005, т. 17, № 4, с. 40-58.