Яровая Е.Б. (Москва, Россия). **Предельное поведение популяций частиц в ветвящемся случайном блуждании.**

Рассматриваются ветвящиеся случайные блуждания (ВСБ) по $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, в которых точки размножения и гибели частиц, называют *источниками* ветвления. Предполагается независимость эволюции частиц друг от друга и от предыстории. Основное внимание уделяется асимптотическому анализу поведения расположенных в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ субпопуляций $\mu(t,x,y)$ и популяций частиц $\mu(t,x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu(t,x,y)$, порожденных частицей-прародительницей, находящейся при $t = 0$ в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, их целочисленных моментов и условных математических ожиданий при $t \to \infty$ для ВСБ как с одним источником ветвления, так и с бесконечным числом источников, расположенных в каждой точке решетки. Если при $t = 0$ в каждой точке решетки находится по одной частице, закон размножения и гибели частиц описывается *критическим* марковским ветвящимся процессом в источниках ветвления. Для *критического* ВСБ, в основе которых лежит симметричное, неприводимое, *возвратное* случайное блуждание с переходными вероятностями $p(t,x,y)$, вырождение большинства субпопуляций приводит к "кластеризации" оставшихся частиц [1,2]. Для выжившей популяции при $t \to \infty$ имеем $\mathbf{E}[\mu(t,x)|\mu(t,x) > 0] \sim Ct$, а $\mathbf{E}[\mu(t,x,y)|\mu(t,x) > 0] \sim Ctp(t,x,y)$, где $C > 0$. Теперь предположим наличие на решетке лишь одного источника и одной начальной частицы при $t = 0$ в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Возникает вопрос о том, как изменится предельное поведение условных математических ожиданий, если все остальные предположения модели сохраняются. В этом случае $\mathbf{E}[\mu(t,x)|\mu(t,x) > 0] = \mathbf{P}^{-1}(\mu(t,x) > 0)$ и $\mathbf{E}[\mu(t,x,y)|\mu(t,x) > 0] = p(t,x,y)\mathbf{P}^{-1}(\mu(t,x) > 0)$. Результаты работ [3,4] о поведении моментов $\mu(t,x,y)$ и $\mu(t,x)$ позволяют доказать в этом случае следующую теорему.

Теорема 1 *Для критического возвратного ВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с одним источником ветвления частиц при $\mu(0,x,y) = \delta_y(x)$ и $t \to \infty$ имеют место утверждения:*

а) если $p(t,x,y) \sim \gamma_d t^{-\frac{d}{2}}$, $\gamma_d > 0$, то

$$\mathbf{E}[\mu(t,x)|\mu(t,x) > 0] \sim K_d(x)v_d(t), \quad \mathbf{E}[\mu(t,x,y)|\mu(t,x) > 0] \sim K_d(x,y)v_d^*(t),$$

б) если $p(t,x,y) \sim h_{d,\alpha}\, t^{-\frac{d}{\alpha}}$, $h_{d,\alpha} > 0$, $\alpha \in [1,2)$, то

$$\mathbf{E}[\mu(t,x)|\mu(t,x) > 0] \sim V_{d,\alpha}(x)u_{d,\alpha}(t), \quad \mathbf{E}[\mu(t,x,y)|\mu(t,x) > 0] \sim V_{d,\alpha}(x,y)u_{d,\alpha}^*(t),$$

где $v_1(t) \sim t^{\frac{1}{4}}$, $v_1^*(t) \sim t^{-\frac{1}{4}}$, $v_2(t) = u_{1,1}(t) \sim \sqrt{\ln t}$, $v_2^*(t) = u_{1,1}(t)^* \sim \frac{\sqrt{\ln t}}{t}$, $u_{1,\alpha} \sim t^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}}$, $u_{1,\alpha} \sim t^{\frac{\alpha-3}{2\alpha}}$, $\alpha \in (1,2)$.

Из этой теоремы видно, что для критического возвратного ВСБ с одним источником ветвления рост условных математических ожиданий популяций и субпопуляций частиц оказывается более медленным, чем при наличии таких же источников с одинаковыми интенсивностями размножения и гибели частиц в каждой точке решетки. При $p(t,x,y) \sim h_{\alpha,d}\, t^{-\frac{d}{\alpha}}$, $t \to \infty$, из-за бесконечной дисперсии скачков ВСБ по $\mathbb{Z}^1$ свойство возвратности блуждания "ослабевает" с уменьшением значения параметра α, а при $\alpha \in (0,1)$ блуждание становится невозвратным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Balashova, D., Molchanov, S., Yarovaya, E.* Structure of the Particle Population for a Branching Random Walk with a Critical Reproduction Law, Methodol. Comput. Appl Probab., 2021, 23, pp. 85–102.
2. *Makarova Iu., Balashova D., Molchanov S., Yarovaya E.* Branching Random Walks with Two Types of Particles on Multidimensional Lattices, Mathematics, 2022, 10(6), pp.1–45.
3. *Rytova, A., Yarovaya E.* Survival analysis of particle populations in branching random walks, Communications in Statistics - Simulation and Computation, 2019, 50(10), pp. 3031-3045.
4. *Yarovaya, E.* Models of Branching Walks and Their Use in the Reliability Theory, Automation and Remote Control, 2010, 71(7), pp. 1308–1324.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 20-01-00487).