Об обобщениях дискретного и интегрального неравенств Коши-Буняковского методом средних значений

С.М. Ситник (БелГУ, Россия)

В докладе в форме небольшого обзора рассматриваются уточнения в терминах средних значений интегрального и дискретного неравенств Коши–Буняковского. Также приведены приложения к получению неравенств для некоторых специальных функций. Результаты можно применить к уточнению оценок ряда величин в теории вероятностей и математической статистике.

Приведём основной результат для уточнения интегрального неравенства Коши-Буняковского [1]–[3]. Назовём абстрактным средним функцию $M(x, y)$, удовлетворяющую естественным условиям: $min(x, y) \leq M(x, y) \leq max(x, y)$ (промежуточность), $M(x, x) = x$ (несмещённость), $M(ax, ay) = a \cdot M(x, y)$ (однородность) и свойству монотонности по каждой переменной. Обозначим через $M^*(x, y)$ величину $M^*(x, y) = \frac{xy}{M(x,y)}$. Тогда справедлива

Теорема 1 *Пусть M - произвольное абстрактное среднее. Тогда справедливо обобщение интегрального неравенства Коши–Буняковского вида*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\, dx \right)^2 \leq \int_a^b (M(f,g))^2\, dx \cdot \int_a^b (M^*(f,g))^2\, dx \leq \tag{1}$$

$$\leq \int_a^b (f(x))^2\, dx \cdot \int_a^b (g(x))^2\, dx, \tag{2}$$

Список литературы

[1] S.M. Sitnik. On generalizations of discrete and integral Cauchy-Bunyakovskii inequalities by the method of mean values. Some applications. 2022, preprint arXiv:2203.14344, 39 p.

[2] С.М. Ситник. *Уточнения и обобщения классических неравенств.* Математический форум. Исследования по математическому анализу, 2009, С. 221–266.

[3] P. Agarwal, A. Korenovskii, S. Sitnik. *A Generalization of Cauchy–Bunyakovsky Integral Inequality Via Means with Max and Min Values*, Chapter 18. In: Trends in Mathematics. Advances in Mathematical Inequalities and Applications. Eds.: P. Agarwal, S.S. Dragomir, M. Jleli, B. Samet. Birkhauser Basel, Springer Nature Singapore, 2018, 333–349.