О ЯДРАХ СЛУЧАЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

СМОРОДИНА Н.В.

Пусть $\xi_x(t)$ – решение стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_x(t) = b(\xi_x(t))b'(\xi_x(t))\,dt + b(\xi_x(t))\,dw(t), \qquad \xi_x(0) = x.$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим самосопряженный оператор

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\big(b^2(x)\frac{d}{dx}\big) + V(x),$$

заданный на области определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Относительно функций $b(x), V(x)$ мы будем предполагать выполнение следующих условий: 1. $V \in L_1(\mathbb{R})$. 2. $b \in C_b^2$ и отделена от нуля. 3. Существует $b_0 > 0$ такое что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b(x) = b_0$. 4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b'(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} b''(x) = 0$. 5. $\int_{\mathbb{R}} x^2(|b(x) - b_0| + |b'(x)|)\,dx < \infty$.

Из условий 1-5 вытекает, что спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из интервала $[0,\infty)$ и, возможно, нескольких отрицательных однократных собственных значений. Через $H_a \subset L_2(\mathbb{R})$ обозначим абсолютно непрерывное подпространство оператора $\mathcal{A}$, а через P_a – ортогональный проектор в $L_2(\mathbb{R})$ на H_a. Через $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}P_a$ обозначим сужение оператора $\mathcal{A}$ на H_a.

Для каждого λ, удовлетворяющего условию $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ определим случайный оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$, полагая

$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \int_0^t e^{\lambda\tau}(P_a f)(\xi_x(\tau))e^{-\int_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\,d\tau.$$

Теорема 1. *1. С вероятностью 1 оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$ является ограниченным интегральным оператором в $L_2(\mathbb{R})$ вида*

$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \int_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,x,y)f(y)\,dy,$$

причем при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ последнее равенство справедливо также для $t = \infty$.

2. Для любых λ, t, x функция $r_\lambda(t,x,\cdot) \in W_2^\alpha$ для любого $\alpha \in [0,\frac{1}{2})$.

Теорема 2. *1. Если $\operatorname{Re}\lambda < 0$ то для любого $f \in H_a$ выполнено*

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}} r_\lambda(\infty,\cdot,y)f(y)\,dy = (\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}f. \tag{1}$$

2. Если $\operatorname{Re}\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$ то для любого $f \in H_a$ выполнено

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,\cdot,y)f(y)\,dy = (\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}f. \tag{2}$$

При $\lambda = 0$ равенство (2) выполнено для любого $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}$.

ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mail address: smorodina@pdmi.ras.ru

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 22-21-00016).