Оптимальное управление линейной стохастической системой

В.Г. Задорожний, Воронежский госуниверситет

Рассматривается управляемая линейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(t)Ax + bu(t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

и квадратичным критерием качества управления

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[\langle B(s_1,s_2)E[x(s_1)], E[x(s_2)]\rangle +$$

$$C(s_1,s_2)E[u(s_1)]E[u(s_2)]]ds_1ds_2 + \frac{1}{2}\langle GE[x(t_1)], E[x(t_1)]\rangle \tag{3}$$

Здесь t – вещественная переменная (время), t_0, t_1 – заданные числа, x является n-мерной векторной функцией, A – заданная вещестенная матрица размера $n \times n$, b – заданный n-мерный вектор, $u(t)$ – скалярная функция (управление), x_0 – случайный вектор, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение, ε – случайный процесс, заданный характеристическим функционалом $\psi(v)$, $B(s_1,s_2)$ – заданная самосопряженная неотрицательная матричная функция размера $n \times n$, $C(s_1,s_2)$ – заданная положительная функция, G – заданная неотрицательная матрица размера $n \times n$, $E[x(t)]$ обозначает математическое ожидание случайного процесса.

Постановка задачи. Найти математическое ожидание $E[u(t)]$ независимого с ε случайного процесса $u(t)$, при котором функционал (3) принимает наименьшее значение и при этом выполняются условия (1), (2).

Введем функцию $\chi(s) = \chi(t_0, t_, s)$ переменной s, которая равна $sign(s - t_0)$ если s принадлежит отрезку с концами $min[t_0, t]$, $max[t_0, t]$ и равна нулю, если s не принадлежит указанному отрезку.

Теорема. Если $E[u(t)]$ является решением задачи, то оно удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма

$$\int_{t_0}^{t_1} W(s,t)E[u(s)]ds = F(t),$$

в котором

$$W(s,t) = \int_s^{t_1}\int_t^{t_1}\langle B(s_1,t)\psi(-i\chi(s,s_1)A)E[x_0], \psi(-i\chi(t,s_2)A)b\rangle ds_2ds_1 +$$

$$C(s,t) + \langle G\psi(-i\chi(s,t_1)A)b, \psi(-i\chi(t,t_1)A)b\rangle,$$

$$F(t) = -\int_{t_0}^{t_1}\langle B(s_1,s_2)\psi(-i\chi(t_0,s_1)A)E[x_0], \psi(-i\chi(t,s_2)A)b\rangle ds_1ds_2$$