

В. И. Афанасьев. Ветвящийся процесс в случайной среде, начинающийся с большого числа частиц¹

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – исходное вероятностное пространство и Δ – пространство вероятностных мер на $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ с метрикой полной вариации. Рассмотрим случайные элементы Q_1, Q_2, \dots , отображающие $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ в Δ . Последовательность $\Pi = \{Q_1, Q_2, \dots\}$ называется случайной средой.

Последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин $\{Z_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ называется ветвящимся процессом в случайной среде, если $Z_0 = m \in \mathbf{N}$ и $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)}$ при $n \in \mathbf{N}_0$, где предполагается, что при фиксированной среде Π случайные величины $\{\xi_i^{(n)} : n \in \mathbf{N}_0, i \in \mathbf{N}\}$ независимы, причем при фиксированном $n \in \mathbf{N}_0$ величины $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots$ одинаково распределены с распределением Q_{n+1} . Сопоставим (случайному) распределению Q_n при $n \in \mathbf{N}$ производящую функцию $f_n(\cdot)$. Предполагается, что случайные элементы Q_1, Q_2, \dots независимы и одинаково распределены. Положим $X_n = \ln f'_n(1)$, $\eta_n = f''_n(1) / (f'_n(1))^2$ при $n \in \mathbf{N}$.

Предположим, что 1) $\mathbf{E}X_1 = 0$, $0 < \mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2 < +\infty$; 2) $\mathbf{E} \ln^{2+q}(\eta_1 \vee 1) < +\infty$ при некотором $q > 0$; $m_n(x) \in \mathbf{N}$ и $\ln m_n(x) \sim \sigma\sqrt{n}x$ при $n \rightarrow \infty$ (для некоторого фиксированного $x > 0$). Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ – стандартное броуновское движение и τ_a – момент первого достижения точки $a \neq 0$ этим процессом.

Теорема 1. Пусть выполнены указанные условия, тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln(Z_{\lfloor nt \rfloor} + 1)}{\sigma\sqrt{n}}, t \geq 0 \mid Z_0 = m_n(x) \right\} \xrightarrow{D} \{x + W(t \wedge \tau_{-x}), t \geq 0\},$$

где символ \xrightarrow{D} означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, +\infty)$ с топологией Скорохода.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда N 24-11-00037, <https://rscf.ru/project/24-11-00037/>