

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ
НА ДЕСЯТОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ¹⁾

С 31 мая по 6 июня 2025 г. состоялась 10-я Международная конференция по стохастическим методам (МКСМ-10). Она (как и предыдущая МКСМ-9) проходила в поселке Дивноморское (г. Геленджик) в спортивно-оздоровительном комплексе “Радуга” Донского государственного технического университета. Организаторами нынешней конференции стали Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (включая Математический центр мирового уровня “Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук”), Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (кафедра теории вероятностей), Институт AIRI, Национальный комитет Общества Бернулли по математической статистике, теории вероятностей, комбинаторике и их применениям, Региональный научно-образовательный математический центр Южного федерального университета (РНОМЦ ЮФУ), Донской государственный технический университет (ДГТУ, кафедра высшей математики).

Данная конференция была посвящена 90-летию создания А. Н. Колмогоровым кафедры теории вероятностей Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. В своем вступительном докладе “К 90-летию кафедры теории вероятностей МГУ” председатель Оргкомитета МКСМ-10 академик РАН А. Н. Ширяев подробно рассказал о становлении теории вероятностей в СССР как отдельной науки и о том, как к 1935 г. была заложена база для создания на математическом отделении механико-математического факультета Московского университета кафедры теории вероятностей. В этом докладе также были перечислены и проанализированы выдающиеся научные достижения сотрудников кафедры за 90 лет ее существования²⁾.

К началу конференции был подготовлен и напечатан специальный выпуск журнала *Journal of Mathematical Sciences*, посвященный 90-летию академика А. Н. Ширяева, который уже долгое время возглавляет кафедру теории вероятностей МГУ. Директор РНОМЦ ЮФУ профессор А. Н. Карапетянц на открытии конференции выступил с приветственной речью и передал несколько экземпляров специального выпуска оргкомитету конференции.

¹⁾ Конференция проводилась при финансовой поддержке Института AIRI и Минобрнауки России (соглашения № 075-02-2025-1720 и № 075-15-2025-303).

²⁾ Текст доклада публикуется в разделе “Информация о научной жизни” настоящего выпуска журнала.

В МКСМ-10 наряду с известными российскими учеными приняли участие представители Португалии, Таджикистана, Казахстана, Узбекистана. Российские участники представляли следующие города: Москва, Санкт-Петербург, Ростов-на-Дону, Воронеж, Томск, Уфа, Нижний Новгород, Хабаровск, Челябинск, Сочи, Таганрог, Майкоп, Великий Новгород, Ульяновск, Сыктывкар, Краснодар, Архангельск, Иваново, Калуга. Всего было сделано 22 пленарных и 54 секционных докладов.

*И. В. Павлов, Т. А. Волосатова, П. А. Яськов,
А. А. Муравлев, А. Н. Карапетьяни*

Ниже публикуются тезисы докладов и сообщений участников конференции.

Абдрахманов С. И. (УУНиТ, Уфа, Россия). **Об одном методе построения решений одномерных стохастического и детерминированного нелинейных уравнений теплопроводности и горения.**

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задан случайный процесс $V(t)$, $t \in [0, T]$, с непрерывными траекториями. Исследуется задача Коши:

$$d_t(u(x, t)) = [K(u(x, t), x, V(t))_{xx} + H(u(x, t), x, V(t))] dt + q(u(x, t), x) * dV(t), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad (x, t) \in \mathbf{R} \times [0, T], \quad (1)$$

где последний интеграл в правой части равенства есть симметричный интеграл [1] по процессу $V(t)$. Пусть $K_z(z, x, v) \neq 0$ при любых $z > 0$, x и v , а функция $1/q(z, x)$ локально интегрируема по переменной $z > 0$. Определим функцию $\Phi(z, x) = \int_0^z dy/q(y, x)$ и обратную к ней при каждом x функцию $G(\cdot, x)$. Введем функцию

$$R(x, z, \zeta) = \frac{1}{K_z(z, x, 0)} [-K_{zz}(z, x, 0)\zeta^2 - 2K_{xz}(z, x, 0)\zeta - K_{xx}(z, x, 0) - H(z, x, 0)].$$

Пусть функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет уравнению $\varphi'' = R(x, \varphi, \varphi')$.

Следующая теорема дополняет результаты работы [2].

Теорема. Если функция $G = G(v + \Phi(\varphi(x), x), x)$ удовлетворяет уравнению $K(G, x, v)_{xx} + H(G, x, v) = 0$ при каждом v , то функция

$$u = u(x, V(t)) = G(V(t) + \Phi(\varphi(x), x), x)$$

является решением задачи Коши (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ф. С. Насыров, *Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ*, Физматлит, М., 2011, 212 с.
2. S. I. Abdrakhmanov, F. S. Nasyrov, "On nonlinear heat-conduction equations with a random right part", *Lobachevskii J. Math.*, **45**:6 (2024), 2641–2650.

Абдрахманов Т. Р., Андриянов Н. А., Кондратенко А. Е., Копытько М. Ю., Октысюк К. Д., Соболев В. Н., Ульянов Я. А. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия). **О наследуемости равномерности дробной частью свертки с равномерной на замощении случайной величиной.**

В [1] было унифицировано понятие дробной части. В [2] было показано, что дробная часть свертки с равномерной на квадрате случайной величиной тоже является равномерной на квадрате. В данной работе продолжается обобщение этих результатов.

Определение. Множество $M \subset \mathbf{Z}^n$ назовем $*$ -связным, если любые его точки можно соединить ломаной, звенья которой имеют единичную длину, а узлы являются элементами M .

Теорема 1. Пусть $M \subset \mathbf{Z}^n$ — конечное $*$ -связное множество, $\mathbf{Z}^n$ можно замостить множеством M , $\xi \sim R\{M\}$, η — независимый с ξ целочисленный n -мерный случайный вектор. Тогда $\{\xi + \eta\} \sim R\{M\}$.

Теорема 2. Пусть $M \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченное связное измеримое множество, $\mathbf{R}^n$ можно замостить множеством M , $\xi \sim R\{M\}$, η — независимый с ξ n -мерный случайный вектор. Тогда $\{\xi + \eta\} \sim R\{M\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Е. Кондратенко, В. Н. Соболев, “Обобщение и унификация понятий остатка от деления и дробной части, максимизация энтропии дробной части свертки с равномерным распределением”, *Вестник ТвГУ. Сер.: Прикл. матем.*, 2022, № 1, 45–52.
2. Н. А. Андриянов, А. Е. Кондратенко, В. Н. Соболев, Я. А. Ульянов, “О максимизации энтропии при свертке с равномерным распределением в двумерном случае”, *Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки*, **39:1** (2024), 37–43.

Афанасьев В. И. (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия). **Предельные теоремы для функционалов от ветвящегося процесса в случайной среде, начинающегося с большого числа частиц³⁾.**

Пусть $\{Z_i^{(k)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ — ветвящийся процесс в случайной среде $\{Q_i, i \in \mathbf{N}\}$, начинающийся с k частиц. Пусть $f_i(\cdot)$ — производящая функция распределения Q_i . Положим $X_i = \ln f'_i(1)$, $\eta_i = f''_i(1)/(f'_i(1))^2$ и введем *сопровождающее случайное блуждание* $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbf{N}$.

Предположение А. Случайная величина X_1 принадлежит без центрирования области притяжения некоторого строго устойчивого закона λ с индексом $\alpha \in (0, 2]$, причем $\lambda((0, +\infty)) \in (0, 1)$.

Предположение В. При некотором $q > 0$ имеем $\mathbf{E} \ln^{\alpha+q}(\eta_1 \vee 1) < +\infty$.

Положим $U_n = \{S_{[nt]}, t \geq 0\}$. По теореме Скорохода существует такая положительная числовая последовательность $\{A_n, n \in \mathbf{N}\}$, что при $n \rightarrow \infty$ $U_n/A_n \xrightarrow{D} U$, где $U = \{U(t), t \geq 0\}$ — строго устойчивый процесс Леви с индексом $\alpha \in (0, 2]$.

³⁾Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00037, <https://rscf.ru/project/24-11-00037/>.

Зафиксируем $x \in (0, +\infty)$. Предположим, что $k = k_n$, причем $\ln k_n \sim A_n x$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $T^{(k_n)}$ — момент вырождения ветвящегося процесса $\{Z_i^{(k_n)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ и $M^{(k_n)} = \max_{0 \leq i < +\infty} Z_i^{(k_n)}$, $\Sigma^{(k_n)} = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i^{(k_n)}$.

Положим $L(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} U(s)$, $M(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} U(s)$ при $t \geq 0$ и $M_x = x + M(T_{-x})$. Пусть T_{-a} — момент первого достижения множества $(-\infty, -a]$, где $a > 0$, процессом $\{L(t), t \geq 0\}$.

Теорема. Пусть выполнены предположения А, В. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{T^{(k_n)}}{n} \xrightarrow{D} T_{-x}, \quad \frac{\ln M^{(k_n)}}{A_n} \xrightarrow{D} M_x, \quad \frac{\ln \Sigma^{(k_n)}}{A_n} \xrightarrow{D} M_x.$$

Азарина С. В. (Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия). **Формула для вычисления производных слева в среднем второго порядка.**

Рассмотрим случайные процессы $\xi(t)$, $\eta(t)$ на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ со значениями в $\mathbf{R}^n$, которые являются L_1 -случайными величинами при всех значениях t из промежутка $[0, T]$. Обозначим $\mathbf{E}_t^\eta$ условное математическое ожидание этого процесса $\eta(t)$ относительно σ -алгебры, порожденной прообразами борелевских множеств при отображении $\eta(t): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Производной в среднем слева процесса $\xi(t)$ в момент времени t называют L_1 -случайную величину

$$D_*^\eta \xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \mathbf{E}_t^\eta \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \right).$$

Эта производная может быть представлена как композиция $\xi(t)$ и борелевского векторного поля $Z(t, x)$:

$$Z(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \mathbf{E} \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \middle| \eta(t) = x \right).$$

Пусть теперь $Z(t, x)$ — C^2 -гладкое векторное поле на $\mathbf{R}^n$. Его производной в среднем слева вдоль $\eta(t)$ относительно $\xi(t)$ назовем L_1 -случайный процесс

$$D_*^\eta Z(t, \xi(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \mathbf{E}_t^\eta \left(\frac{Z(t, \xi(t)) - Z(t - \Delta t, \xi(t - \Delta t))}{\Delta t} \right).$$

Рассмотрим винеровский процесс $w(t)$ в $\mathbf{R}^n$ в качестве процесса $\eta(t)$ и процесс $\xi(t)$, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt + A(t, \xi(t)) dw(t),$$

где снос $a(t, x)$ и диффузионное слагаемое $A(t, x)$ — векторное поле и поле линейных операторов в $\mathbf{R}^n$ соответственно.

Используя обратную формулу Ито–Вентцеля, удастся доказать следующее утверждение.

Теорема. Для сноса, равного нулю, $a(t)$ или $a(t, x)$, и диффузионного слагаемого, равного A , Aw или $A(t)$, можно вычислить производную слева в среднем $D_*^w D_*^w \xi(t)$ в явном виде.

Белявский Г. И., Данилова Н. В. (Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия). **Об одном вязкостном решении уравнения теплопроводности в связи с формулой Блэка–Шоулса для модели стохастической волатильности⁴⁾.**

Рассматривается задача суперхеджирования для марковского финансового обязательства $f(S_T)$ и для модели со стохастической волатильностью $dS(t) = X(t)S(t)dW(t)$, с начальным условием $S(0) = S_0$, под управлением двух независимых случайных процессов W и X . Для процесса волатильности предполагается существование двух детерминированных функций: непрерывной и ограниченной сверху функции $M(t)$ и непрерывной и ограниченной снизу функции $m(t)$, для которых выполняется неравенство $m(t) \leq X(t) \leq M(t)$ при всех $t \in [0, T]$ с вероятностью, равной единице. Для вычисления верхней цены хеджирования необходимо решить задачу оптимального стохастического управления $\sup_{Q \in P^W \times P_X} \mathbf{E}_Q f(S_T)$. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для этой задачи является уравнением G-теплопроводности:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{x^2}{2} \left[\frac{M^2(t) - m^2(t)}{2} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right| + \frac{M^2(t) + m^2(t)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] = 0$$

с краевым условием $V(T, x) = f(x)$. Основной результат заключается в следующей теореме.

Теорема. Если краевое условие — непрерывная выпуклая функция, то решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана — выпуклая функция по переменной x , удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{x^2 M^2(t)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

с краевым условием $V(T, x) = f(x)$.

Если $M(t) = \hat{\sigma}$, то решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана является решением уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{x^2 \hat{\sigma}^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0,$$

что соответствует модели Блэка–Шоулса, следовательно, верхняя цена для модели с неопределенной волатильностью вычисляется при помощи формулы Блэка–Шоулса с максимальной волатильностью.

Булинская Е. В. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия). **О сетях риска.**

Сети риска стали популярны в последнее десятилетие (см. [1], [2]).

⁴⁾Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-11-00094, <https://rscf.ru/project/25-11-00094/>.

Теорема. Функция Гербера–Шуу $\phi(u_0, \dots, u_n)$ для $(n+1)$ -мерной сети удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \left(\delta + \sum_{i=0}^n \lambda_i \right) \phi(u_0, \dots, u_n) &= \sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial}{\partial u_i} \phi(u_0, \dots, u_n) \\ &+ \lambda_0 \int_0^{u_0} \phi(u_0 - x, u_1, \dots, u_n) f_0(x) dx + \lambda_0 \int_{u_0}^{\infty} w \left(\sum_{i=0}^n u_i, x - u_0 \right) f_0(x) dx \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \int_0^{\min(u_0/\beta_i, u_i/\alpha_i)} \phi(u_0 - \beta_i x, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i - \alpha_i x, u_{i+1}, \dots, u_n) f_i(x) dx \right. \\ &\left. + \lambda_i \int_{\min(u_0/\beta_i, u_i/\alpha_i)}^{\infty} w \left(\sum_{j=0}^n u_j, (\beta_i x - u_0)^+, (\alpha_i x - u_i)^+ \right) f_i(x) dx \right), \end{aligned}$$

где u_i — начальный капитал i -й компании, а $f_i(x)$ — плотность распределения ее требований, $i = 0, 1, \dots, n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Bulinskaya, “New research directions in modern actuarial sciences”, *Modern problems of stochastic analysis and statistics*, Selected contributions in honor of V. Konakov, Springer Proc. Math. Stat., **208**, Springer, Cham, 2017, 349–408.
2. F. Avram, S.-H. Loke, “On central branch/reinsurance risk networks: exact results and heuristics”, *Risks*, **6:2** (2018), 35, 18 pp.

Бурнашев М.В. (Высшая школа современной математики МФТИ, Долгопрудный, Россия). **О функции концентрации одной суммы случайных величин, связанных с двоичным симметричным каналом.**

Рассмотрим независимые одинаково распределенные двоичные n -векторы $\mathbf{x}_j$, $j = 1, \dots, M$. Каждая координата каждого n -вектора $\mathbf{x}_j$ выбирается независимо и равна нулю или единице с вероятностью $1/2$. Обозначим через $w_j(n) = w(\mathbf{x}_j)$ вес (т.е. число единиц) двоичного n -вектора $\mathbf{x}_j$. Для $0 < z < 1$ рассмотрим случайную сумму $S(z, M, n) = \sum_{j=1}^M z^{w_j(n)}$. Суммы $S(z, M, n)$ возникают в теории информации при исследовании двоичного симметричного канала BSC(p), а также в некоторых задачах теории поиска и планирования экспериментов. Функции распределения (концентрации) случайных сумм $S(z, M, n)$ ранее не исследовались. Желательно, чтобы описания этих функций распределения были неасимптотическими по z , M , n .

Теорема. Пусть $A = z^{bn}$. Справедливы следующие утверждения.

- 1) Если $0 \leq b \leq 1/2$, то

$$\ln \mathbf{P}\{S(z, M, n) \geq Mz^{bn}\} = Mn[h(b) - \ln 2 + r_1(b, n)],$$

где $h(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$, и

$$-\frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{1}{n} \ln \frac{1-b}{b} - \frac{1}{2n^2 b(1-b)} \leq r_1(b, n) \leq \frac{\ln(n+1)}{n}. \quad (1)$$

2) Если $1/2 \leq b \leq 1$, то

$$\ln \mathbf{P}\{S(z, M, n) \leq Mz^{bn}\} = Mn[\ln 2 - h(b) + r_2(b, n)],$$

где для $r_2(b, n)$ имеют место границы (1).

Чадромцев Н. Д. (Научно-технологический университет “Сириус”, Сочи, Россия). **Влияние оператора затухания на оборот линейных временных рядов.**

В литературе по финансовой математике много внимания уделяется снижению риска и прогнозированию будущих доходностей, в то время как важная статистика — *оборот* — алгоритмической торговой стратегии часто упускается из виду. В данном исследовании мы разрабатываем математическую модель для *оборота* и анализируем, как оператор *затухания* снижает ее значение. Мы подробно рассматриваем влияние оператора *затухания* на *линейные временные ряды*. Одним из ключевых результатов является следующая теорема.

Теорема. Значение *оборота* после применения оператора *линейного затухания* длины n к *стационарному гауссовскому линейному временному ряду* порядка m $\tilde{w} = \{w_t\}$, $t \in \mathbf{Z}$, строго уменьшается в следующих случаях:

- $n > 1$ для $m \in 0, 1, 2$;
- $n > \max(m, 1)$ для произвольного m ;
- $n > 1$ для авторегрессионной модели порядка 1.

Также нами проведен ряд численных экспериментов как на синтетических, так и на рыночных данных.

Ченцов А. М. (МФТИ, Долгопрудный, Россия). **Оценка структурных параметров и эффектов воздействия в квантильных регрессиях с использованием метода двойного машинного обучения.**

Модель. Рассматривается модель структурной частично-линейной регрессии с контрольными переменными $X = (X_1, \dots, X_p)$ и переменной воздействия D . Идентификационное условие накладывается на квантиль уровня $\tau \in (0, 1)$ условного распределения переменной Y :

$$\begin{aligned} Q_{Y|X,D}(\tau) &:= \alpha_0(\tau)D + g_0(X, \varepsilon), \quad f_\varepsilon(0) > 0, \\ D &= m_0(X) + v, \quad \mathbf{E}(v | X) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $Q_{Y|X,D}(\tau)$ — квантильная функция условного распределения зависимой переменной Y , g_0 и m_0 — неизвестные функции, ε , v — независимо одинаково распределенные ошибки, имеющие абсолютно непрерывное распределение. Исследователю доступна случайная выборка $\{(Y_i, D_i, X_i)\}_{i=1}^n$, причем размер выборки может быть меньше числа контрольных переменных p . Интересующим исследователя параметром является коэффициент α_0 , который обычно в такой модели интерпретируется как эффект воздействия на τ -квантиль распределения Y .

Предположение. Существуют $a, A \in \mathbf{R}$ такие, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\|u\|=1} \mathbf{E}_n \mathbf{I}\{|vu| < a\} = 0, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|u\|=1} \mathbf{E}_n (vu)^2 \leq A$$

($\mathbf{E}_n$ — выборочное среднее), и $b_0, b_1(\tau) > 0$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_n v^2 = b_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_n [f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau))v^2] = b_1(\tau), \quad \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{|v_i|}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Теорема. Пусть $\{P_n\}$ — семейство распределений, порождающих данные модели (1), для которых выполнены условия предположения. Тогда оценка $\hat{\alpha}_0$, заданная выборочным аналогом уравнения

$$\alpha_0 = \min_{\alpha} \mathbf{E} \rho_{\tau}[Y - g_0(X) - \alpha(D - m_0(X))], \quad \rho_{\tau}(z) := \tau - \mathbf{I}\{z \leq 0\},$$

в котором вместо истинных значений g_0 и m_0 используются их $n^{-\phi_g}$ - и $n^{-\phi_m}$ -состоятельные оценки соответственно такие, что $\phi_g + \phi_m \geq 1/2$, является асимптотически нормальной равномерно по всем элементам $\{P_n\}$:

$$\forall P \in \{P_n\} \quad \sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = \frac{\tau(1 - \tau)}{f_{\varepsilon}^2(0)}.$$

Чуб Е. Г. (РГУПС, Ростов-на-Дону, Россия), **Соколов С. В.** (МТУСИ, Москва, Россия). **О некотором решении задачи оценивания интегрированной навигационной системы.**

Работа посвящена разработке алгоритма, позволяющего объединить возможности современных интегрированных навигационных систем [1] и методы, учитывающие влияние помех при оценке навигационных параметров подвижного объекта. Поставленная задача решалась на основе интеграции традиционной бесплатформенной навигационной системы и системы навигации по оптическому потоку.

Теорема. Пусть Y_k — вектор состояния навигационной системы, k — шаг, F, F_0, H — известные нелинейные функции, определяемые из условия функционирования навигационных систем, W_Y — вектор помех акселерометров и датчиков угловой скорости с известной матрицей дисперсии, W_H — вектор погрешностей системы навигации по оптическому потоку с известной матрицей дисперсии. Дискретная стохастическая модель бесплатформенной навигационной системы в форме “объект-наблюдатель”

$$Y_k = F(Y_{k-1}, k-1) + F_0(Y_{k-1}, k-1)W_Y, \\ Z = H(Y_{k-1}, k-1) + W_H,$$

построенная на основе интеграции оптической и инерциальной систем измерения, позволяет решить задачу определения оценки вектора состояния бесплатформенной навигационной системы с минимальными приборными затратами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. Н. Розенберг, С. В. Соколов, В. И. Уманский, В. А. Погорелов, *Теоретические основы тесной интеграции инерциально-спутниковых навигационных систем*, Физматлит, М., 2018, 312 с.

Чубатов А. А. (Научно-технологический университет “Сириус”, Сочи, Россия). **О решении прямого-обратного СДУ, связанного с системой квазилинейных параболических УЧП, и задаче стохастического оптимального управления.**

Дана задача Коши для системы квазилинейных параболических уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \text{Tr}[AA^+ \nabla^2 v_k] + \psi_k(x, v, \nabla v) &= 0, \\ v_k(T, x) &= h_k(x), \quad k = 0, \dots, d, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tau \in [0, T]$, $x \in \mathbf{R}^d$, $v_k \in \mathbf{R}$, $A = A(x, v, \nabla v) \in \mathbf{R}^{d \times d}$, $v = (v_0, \dots, v_d)$.

Запишем прямое-обратное стохастическое дифференциальное уравнение (ПОСДУ), связанное с системой (1):

$$dX_t = A(X_t, Y_t, G_t) dW_t, \quad X_\tau = x, \quad (2)$$

$$dY_t = -\psi(X_t, Y_t, G_t) dt + G_t^+ A(X_t, Y_t, G_t) dW_t, \quad Y_T = h(X_T), \quad (3)$$

где $t \in [\tau, T]$, $Y_t = v(t, X_t) \in \mathbf{R}^{1+d}$, $W_t \in \mathbf{R}^d$ — винеровский процесс.

Теорема 1. Если функции $A(x, v, \gamma)$, $\psi(x, v, \gamma)$, $h(x)$ таковы, что существует единственное сильное решение (X_t, Y_t, G_t) ПОСДУ (2), (3), то вязкостное решение задачи (1) есть $v(\tau, x) = Y_\tau$, $\tau \in [0, T]$.

Рассмотрим задачу стохастического оптимального управления $\inf_{\{\mathcal{A}_t\}} L$, где $t \in [\tau, T]$, $\tau \leq t \leq T$, $\mathcal{A}_t = (y_t, g_t)$ — управление, y_t, g_t — $(\mathcal{F}_t)$ -адаптированные и квадратично-интегрируемые процессы,

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{E} \left[|Y_T^{\mathcal{A}} - h(X_T^{\mathcal{A}})|^2 + \int_\tau^T |Y_t^{\mathcal{A}} - y_t|^2 dt \right], \\ Y_t^{\mathcal{A}} &= y_\tau - \int_\tau^t \psi(X_s^{\mathcal{A}}, Y_s^{\mathcal{A}}, g_s) ds + \int_\tau^t g_s^+ A(X_s^{\mathcal{A}}, y_s, g_s) dW_s, \\ X_t^{\mathcal{A}} &= x + \int_\tau^t A(X_s^{\mathcal{A}}, y_s, g_s) dW_s. \end{aligned}$$

Теорема 2. Если выполнены предположения 1 и 2 из [1], то $\inf_{\{\mathcal{A}_t\}} L = 0$ и $(X_t^{\mathcal{A}}, Y_t^{\mathcal{A}}, g_t)$ — единственное решение ПОСДУ (2), (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Ji, S. Peng, Y. Peng, X. Zhang, “Three algorithms for solving high-dimensional fully coupled FBSDEs through deep learning”, *IEEE Intell. Syst.*, **35:3** (2020), 71–84.

Чувенков А. Ф. (РГЭУ (РИНХ), Ростов-на-Дону, Россия). **Математическое моделирование и решение задач оптимизации в условиях стохастической неопределенности.**

Теорема. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная целевая функция, $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$, y — случайный вектор, координаты которого суть произвольные функции распределения, и пусть $g(j, x, y)$, $j = 1, 2, \dots, m$, — непрерывная случайная функция

ограничений, а β и $\alpha(j)$ — известные доверительные уровни вероятности. Тогда следующая задача оптимизации: найти $\max s$ при вероятностных ограничениях

$$\begin{cases} \Pr\{f(x, y) \geq s\} \geq \beta, \\ \Pr\{g(j, x, y) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m\} \geq \alpha(j), \end{cases}$$

имеет оптимальное решение на ограниченном замкнутом множестве Ω .

Для доказательства этой теоремы разработан гибридный алгоритм на основе нейронных сетей с использованием методов статистического моделирования и генетических алгоритмов.

Есин А. А. (ИППИ РАН, Москва, Россия). **Пропускная способность системы телеграфика в периодических микросотах: модель с непрерывным состоянием для высокоскоростных агрегаторов.**

Теорема (динамика сигнала с учетом скорости и устойчивости системы телеграфика в периодической микросоте). Пусть $Q_t \in [q_{\min}, q_{\max}]$ — уровень принимаемого сигнала (в дБ) от мобильного агрегатора, движущегося с постоянной скоростью $v_0 > 0$ через периодическую соту S_1 . Пусть $S_t = \{x(0) + v_0 t\} \in S_1$ обозначает положение внутри соты (по модулю ее длины). Предположим, что Q_t удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dQ_t = -\alpha(Q_t - q(S_t, v_0)) dt + \sigma(v_0) dW_t + dL_t,$$

где средний профиль сигнала задается выражением

$$q(s, v_0) = q_0 - a d_\varepsilon(s)^\gamma - b v_0 - c \ln(1 + v_0),$$

$a d_\varepsilon(s) = ps(1 - s) + \varepsilon^2$ представляет собой сглаженное приближение минимального расстояния до ближайшей базовой станции в пределах периодической соты.

Предполагается также наличие отражения на границах $q_{\min}$ и $q_{\max}$, что гарантирует допустимый уровень сигнала в любой момент времени.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) совместный процесс $(Q_t, S_t) \in [q_{\min}, q_{\max}] \times S_1$ допускает единственное гладкое стационарное распределение $\pi_{v_0}(q, s) \in C^\infty$;

2) для любой функции обслуживания $u(q)$, зависящей от уровня сигнала (например, скорости передачи или политики доступа), средняя пропускная способность задается формулой

$$\mu(v_0) = \int_{S_1} \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} u(q) \pi_{v_0}(q, s) dq ds;$$

3) система устойчива (т.е. очередь не растет) в том и только том случае, когда интенсивность входящего потока λ_{in} удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{in} < \mu(v_0).$$

Фарвазова А. А. (Москва, Россия). Моделирование опционов кэп и флор на RUONIA и ключевую ставку Банка России.

Приведем теорему для ценообразования кэплета с помощью модели Халла–Уайта (см. [1], [3]) для усредненной процентной ставки в случае $t_0 \leq T_{j-1} < T_j$, где t_0 — дата оценивания опциона, T_{j-1} — дата начала действия опциона, T_j — дата экспирации опциона.

Теорема. Формула для ценообразования кэплета в случае арифметического усреднения базовой ставки $A(T_{j-1}, T_j)$ с помощью модели Халла–Уайта имеет вид

$$C_{AA}^{HW}(t_0, A_j(t_0), K, T_{j-1}, T_j) = \frac{P(t_0, T_j)}{\tau_j} \left(\tau_j (A_j(t_0) - K) N(d) + \sigma \sqrt{T(a, t_0, T_{j-1}, T_j)} \phi(d) \right), \quad (1)$$

где $\tau_j = T_j - T_{j-1}$ — период усреднения, K — страйк, $P(t_0, T_j)$ — дисконт-фактор, $A_j(t_0)$ — форвард в момент времени t_0 , $\sigma = \hat{\sigma}_{\text{implied}}^{\text{normSABR}}(K, t_0, T_{j-1}, T_j)$ — параметризация волатильности (см. [2], [4]), $\sigma^2 T(a, t_0, T_{j-1}, T_j)$ — вариация,

$$d = \frac{\tau_j (A_j(t_0) - K)}{(\sigma \sqrt{T(a, t_0, T_{j-1}, T_j)})},$$

$N(\cdot)$ и $\phi(\cdot)$ — функция и плотность распределения стандартной нормальной величины, параметр калибровки a — скорость возврата к среднему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Brigo, F. Mercurio, *Interest rate models — theory and practice. With smile, inflation and credit*, 2nd ed., Springer Finance, Springer-Verlag, Berlin, 2006, lvi+981 pp.
2. P. S. Hagan, D. Kumar, A. S. Lesniewski, D. E. Woodward, “Managing smile risk”, *Wilmott*, 2002, № 1, 84–108.
3. T. Hasegawa, *Caplet formulae for backward-looking term rates with Hull–White model*, Working paper, 2021, 11 pp.
4. S. Willems, *SABR smiles for RFR caplets*, Risk.net, 2021, <https://www.risk.net/cutting-edge/banking/7755356/sabr-smiles-for-rfr-caplets>.

Федоткин А. М., Федоткин А. А. (ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия). Существование стационарного режима циклического управления с продлением и дообслуживанием неординарными потоками.

В работе [1] исследована математическая модель циклического управления конфликтными транспортными потоками. Рассмотрим теперь систему управления конфликтными неординарными потоками Π_1 и Π_2 с помощью циклического алгоритма с продлением и дообслуживанием [2]. При $j = 1, 2$ поток Π_j является неординарным с интенсивностью λ_j . В каждый вызывающий момент по потоку Π_j могут поступить одна, две или три заявки с вероятностями p_j, q_j или s_j .

Изучим случайную последовательность

$$\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \xi'_{1,i-1}, \xi'_{2,i-1}), i \in \{0, 1, \dots\}\}, \quad (1)$$

Γ_i — состояние прибора на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\kappa_{j,i} \in X$ — размер очереди потока Π_j в момент τ_i , а $\xi'_{j,i-1} \in \{0, 1, \dots, l_j\}$ — реально обслуженное число неоднородных требований потока Π_j за промежуток времени $[\tau_{i-1}, \tau_i)$. Смена текущего состояния обслуживающего устройства принимается в случайные моменты времени $\tau_0, \tau_1, \dots$. Последовательность (1) является однородной марковской цепью [3].

Теорема. Для существования стационарного распределения однородной цепи Маркова (1) достаточно выполнения условий

$$\lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l_1 < 0, \quad \lambda_2 T(3s_2 + 2q_2 + p_2) - l_2 < 0,$$

где T — минимальный цикл смены состояний обслуживающего устройства и l_1, l_2 определяют максимальную пропускную способность системы по потоку Π_1, Π_2 соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. А. Федоткин, А. М. Федоткин, “Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко–Коваленко”, *Автомат. и телемех.*, 2009, № 12, 92–108; англ. пер.: М. А. Fedotkin, A. M. Fedotkin, “Analysis and optimization of output processes of conflicting Gnedenko–Kovalenko traffic streams under cyclic control”, *Autom. Remote Control*, **70**:12 (2009), 2024–2038.
2. А. М. Федоткин, “Алгоритмическое управление с дообслуживанием неординарными пуассоновскими потоками малой интенсивности”, *Труды XXII международной конференции “Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии”* (Н. Новгород, 2022), Н. Новгород, Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2022, 141–144.
3. А. М. Федоткин, А. А. Федоткин, “Управление с дообслуживанием неординарными пуассоновскими потоками”, В ст.: “Тезисы докладов, представленных на Восьмой международной конференции по стохастическим методам”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **68**:4 (2023), 839–840; англ. пер.: A. M. Fedotkin, A. A. Fedotkin, “Control with afterservice of extra-ordinary Poisson flows”, In: “Abstracts of talks given at the 8th international conference on stochastic methods”, *Theory Probab. Appl.*, **68**:4 (2024), 679.

Филичкина Е. М. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия). **Случайные блуждания с поглощением частиц.**

Рассмотрим случайное блуждание по решетке $\mathbf{Z}^d$, $d = 1, 2$, с расположенными на ней источниками поглощения в выделенных k точках $x_1, \dots, x_k$ (необходимые определения см., например, в [1]). Предполагаем, что в начальный момент времени в каждой точке решетки расположена одна частица. Будем исследовать асимптотическое поведение среднего числа частиц $m_1(t, x)$, $x \in \mathbf{Z}^d$.

Теорема. При $t \rightarrow \infty$ верны следующие соотношения:

$$m_1(t, x) \sim \frac{g_1(x, x_1, \dots, x_k)}{b_0 \sqrt{t}}, \quad d = 1;$$

$$m_1(t, x) \sim \frac{g_2(x, x_1, \dots, x_k)}{b_0 \ln t}, \quad d = 2.$$

Здесь b_0 — интенсивность поглощения, а функции $g_1(x, x_1, \dots, x_k)$, $g_2(x, x_1, \dots, x_k)$ могут быть явно выражены в терминах переходных вероятностей случайного блуждания, лежащего в основе процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. Filichkina, Е. Yarovaya, “Branching random walks with one particle generation center and possible absorption at every point”, *Mathematics*, **11:7** (2023), 1676, 16 pp.

Гликлик Ю. Е. (Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия). **Мартингалы на группе диффеоморфизмов плоского n -мерного тора.**

Мы изучаем стохастические процессы на группе соболевских диффеоморфизмов плоского n -мерного тора $\mathcal{T}^n$, которые удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению второго порядка с производными в среднем слева и некоторому соотношению между их первыми производными в среднем слева и симметрическими производными в среднем. Из упомянутого соотношения следует, что эти процессы являются мартингалами. Указанные уравнение и соотношение имеют следующий вид:

$$D_* D_* \xi(t) = \overline{F}, \quad D_* \xi(t) = 2D_S \xi(t),$$

где D_* — производная в среднем слева, а D_S — симметрическая производная в среднем.

Мы рассматриваем два специальных мартингала на $\mathcal{T}^n$, заданные в терминах интегралов Ито по винеровскому процессу $w(t)$. Затем мы преобразуем указанные мартингалы в соответствующие мартингалы на группе H^s соболевских диффеоморфизмов тора $\mathcal{T}^n$ при $s > n/2 + 2$.

Теорема. Рассматриваемые мартингалы порождают на торе потоки специальных неьютоновских жидкостей, которые удовлетворяют аналогам уравнения Бюргерса и аналогам уравнения неразрывности.

Гондин С. А., Пчелинцев Е. А. (Томский государственный университет, Томск, Россия). **Квантильное хеджирование азиатских опционов на (B, S) -рынках⁵⁾.**

В работе развивается метод квантильного ценообразования азиатских опционов купли с использованием подхода, предложенного в [1]. Рассматривается непрерывная модель финансового (B, S) -рынка на временном интервале $[0, 1]$

⁵⁾Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00191, <https://rscf.ru/project/24-11-00191/>.

при наличии транзакционных издержек. Предполагаем, что цена безрискового актива постоянна: $B_t = 1$ для всех $t \in [0, 1]$, динамика рискованного актива $(S_t)_{0 \leq t \leq 1}$ задается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS_t = S_t(m dt + \sigma dW_t).$$

Изучается вопрос снижения стоимости опциона азиатского типа с платежной функцией

$$H = \left(\int_0^1 S_t dt - K \right)_+.$$

В случае отсутствия транзакционных издержек получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Тогда для квантильной цены C_ε азиатского опциона имеет место равенство

$$C_\varepsilon = \mathbf{E}[H \mathbf{I}_A].$$

Здесь математическое ожидание считается по специальной мере из [2]. Если $m \leq \sigma^2$, то $A = \{W_1 < b\}$, а если $m > \sigma^2$, то $A = \{W_1 < b_1\} \cup \{W_1 > b_2\}$. Значения b, b_1, b_2 находятся из уравнения $\mathbf{P}(A) = 1 - \varepsilon$.

Затем исследуется случай с учетом транзакционных издержек. Используя подход Леланда [3] и заменяя параметр волатильности на $\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 + \sigma \sqrt{n} \kappa_n \sqrt{8/\pi}$, где κ_n — пропорциональный транзакционный коэффициент, а n — количество пересмотров портфеля, получаем следующий результат.

Теорема 2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \kappa_n = \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{C}_\varepsilon = S_0.$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \kappa_n = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{C}_\varepsilon = C_\varepsilon.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Föllmer, P. Leukert, “Quantile hedging”, *Finance Stoch.*, **3:3** (1999), 251–273.
2. А. А. Мурзинцева, С. М. Пергаменщikov, Е. А. Пчелинцев, “Задача хеджирования азиатских опционов купли с транзакционными издержками”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **68:2** (2023), 253–276; англ. пер.: А. А. Murzintseva, S. M. Pergamenchikov, E. A. Pchelintsev, “Hedging problem for Asian call options with transaction costs”, *Theory Probab. Appl.*, **68:2** (2023), 211–230.
3. Н. Е. Leland, “Option pricing and replication with transactions costs”, *J. Finance*, **40:5** (1985), 1283–1301.

Ивлев О. Е. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия). Спектр случайного оператора ветвящегося блуждания по $\mathbf{Z}$ в случайной поглощающей среде.

Рассматривается непрерывное по времени простое симметричное ветвящееся случайное блуждание по одномерной целочисленной решетке $\mathbf{Z}$ в неоднородной случайной среде. Ветвящаяся среда определяется одним центром размножения

частиц с неслучайной интенсивностью деления, а также полем $\mathcal{M} = \{\mu(x, \cdot), x \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин, симметрично расположенных относительно центра размножения, которые задают интенсивности гибели частиц. Предполагается, что число источников конечно и что в начальный момент времени на решетке находится только одна частица. Представленный результат обобщает условие возникновения положительного собственного значения самосопряженного оператора из [1] для случайной среды, имеющей $2n$ источников гибели частиц, в которых поглощение частиц задается одинаково распределенными случайными величинами.

Теорема. *Рассмотрим среду w_n , в которой $2n$ соседних с нулем точек имеют интенсивности гибели равные μ . Положительное собственное значение в этой среде существует тогда и только тогда, когда*

$$\Lambda > \frac{2}{\sigma} \frac{(1 + \sigma\mu)(D_{n-1} - D_{n-2}) - (D_{n-2} - D_{n-3})}{(1 + \sigma\mu)D_{n-1} - D_{n-2}},$$

где

$$\sigma = \frac{2}{\pi}, \quad D_n = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4}}{2} \right)^{n-i} \left(\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4}}{2} \right)^i, \quad \beta = 2 + \sigma\xi,$$

ξ — независимая копия $\mu(x, \omega)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. Kutsenko, S. Molchanov, E. Yarovaya, “Branching random walks in a random killing environment with a single reproduction source”, *Mathematics*, **12:4** (2024), 550, 22 pp.

Калимулина Э.Ю. (МГУ им. М.В. Ломоносова, ИППИ РАН, Москва, Россия). **Эквивалентность ансамблей для процесса с нулевым радиусом взаимодействия на разреженных конфигурационных сетях.**

В докладе рассматривается процесс с нулевым радиусом взаимодействия (ZRP) на разреженной случайной сети, порожденной конфигурационной моделью: граф G_N имеет N вершин с независимыми одинаково распределенными степенями $\{k_i^{(N)}\}_{i=1}^N$, удовлетворяющими неравенству $\max_i k_i^{(N)} \leq C\sqrt{N}$ при некотором фиксированном $C > 0$; выборочная функция распределения степеней

$$\Pi_N(k) = N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{I}\{k_i^{(N)} = k\}$$

покомпонентно сходится к пределу $\Pi(k)$ при $N \rightarrow \infty$. Частицы переходят с вершины x , в которой находится m частиц, со скоростью $u(m)$; одноместные веса

$$p(m) = \prod_{n=1}^m u(n)^{-1}$$

убывают экспоненциально:

$$p(m) \leq ae^{-bm}.$$

Пусть M_N — общее число частиц с плотностью $\rho_N = M_N/N$, причем $\rho_N \rightarrow \rho < \rho_c$, где ρ_c — критическая плотность соответствующего большого канонического ансамбля.

Определим *эффективные веса*

$$\hat{p}_N(m) = p(m) \sum_{k \geq 1} \Pi_N(k) k^m, \quad \hat{p}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{p}_N(m),$$

и положим

$$Z(z) = \sum_{m \geq 0} \hat{p}(m) z^m.$$

Фугасность $z = z(\rho) \in (0, 1)$ — единственное решение уравнения

$$\rho = \frac{\sum_{m \geq 0} m \hat{p}(m) z^m}{Z(z)}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для любого фиксированного $m \in \mathbf{N}_0$ каноническая мера $\mathbf{P}_N$ процесса ZRP на G_N удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}_N(\eta(x) = m) = \frac{\hat{p}(m) z^m}{Z(z)} =: \nu_\rho(m), \quad \|\mathbf{P}_N - \nu_\rho^{\otimes N}\|_{\text{TV}} \leq e^{-cN}$$

при некотором $c > 0$, не зависящем от N , и

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N(M_N) = \ln Z(z) - z\rho.$$

Карачанская Е. В. (Дальневосточный государственный университет путей сообщения, Хабаровск, Россия). **О содержательности случайного сигнала.**

Проблема поиска внеземных цивилизаций — одна из интереснейших проблем. Предлагается и обосновывается подход, отличный от традиционно применяемых [1], который состоит в том, что могут быть отправлены последовательности асинхронных случайных сигналов, вероятностные свойства которых можно связать с константами. Наличие подобных констант может служить характеристикой искусственности сигналов [2].

Пусть T — полное время наблюдения, $T = \sum_{l=1}^k \Delta_l$, состоящее из непересекающихся интервалов времени; $n_i(\Delta_l) = n_i(l)$ — число случайных сигналов (событий), относящихся к группе со средней длительностью t_i , полученных в интервале времени Δ_l ; $\kappa_j(l)$ — независимые для любых j, l случайные величины, характеризующие поглощающую способность случайной среды:

$$\mathbf{P}(\kappa_j(l) = 1) = P(l), \quad \mathbf{P}(\kappa_j(l) = 0) = q(l) = 1 - P(l), \quad j \geq 1, \quad \kappa_0(l) = 0,$$

и $(P(1), P(2), \dots, P(k))$ — последовательность вероятностей поглощения/искажения сигналов.

Теорема. Пусть λ_1 и λ_2 — параметры двух независимых пуассоновских потоков случайных сигналов, и пусть

$$\eta(T) = \frac{Z_1(T)}{Z_2(T) + 1}, \quad \text{где } Z_i(T) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{n_i(l)} \kappa_j(l), \quad i = 1, 2,$$

— случайная функция. Тогда для любых реализаций последовательности вероятностей поглощения/искажения $(P(1), P(2), \dots, P(k))$ сигналов имеет место равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \eta(T) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. С. Шкловский, *Вселенная, жизнь, разум*, 6-е изд., доп., Проблемы науки и техн. прогресса, Наука, М., 1987, 320 с.
2. В. А. Дубко, “Применение метода обходного мышления”, *Тезисы докладов 3-й Международной научно-практической конференции “Педагогический процесс в условиях перехода к новому состоянию общества”* (Биробиджан, 1994), Изд-во БГПИ, Биробиджан, 1995, 69–70.

Климентов Д. С. (Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия). **Деривационные уравнения Вейнгартена для поверхностей класса C^1 .**

Пусть S — гладкая поверхность класса C^1 с параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$ положительной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве E^3 . Не ограничивая общности, можно считать, что вторая основная форма поверхности приведена к изометрическому виду: $II = \mu[(dx^1)^2 + (dx^2)^2]$. Первую форму поверхности S будем обозначать $I = g_{ij} dx^i dx^j$. При выводе уравнений Вейнгартена используется понятие второй производной Ито вдоль траектории броуновского движения на S . Подробнее об этом см. в [1]. В [1] также выводится соотношение для коэффициента второй формы:

$$\mu(B_t^1) dt = \frac{((\vec{r}_1)_{2I}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|},$$

где $(\vec{r}_1)_{2I}$ — вторая производная Ито. Имеет место следующая теорема.

Теорема. На поверхности S имеют место соотношения

$$n_1 = \mu \frac{(g_{11} - g_{22})\vec{r}_1 + (g_{12} - g_{11})\vec{r}_2}{|I|},$$

$$n_2 = \mu \frac{(g_{12} - g_{22}b_{12})\vec{r}_1 + (g_{12} - g_{11})\vec{r}_2}{|I|},$$

где n — вектор нормали поверхности, μ приведено выше, производные нормали понимаются в смысле Шварца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. С. Климентов, “Стохастическая дифференциальная геометрия гладких поверхностей положительной кривизны”, *Прикл. матем. Физ.*, **55**:3 (2023), 220–227.

Колногоров А. В. (Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия). **О минимаксном подходе к задаче о гауссовском многоруком бандите**⁶⁾.

Предельное описание минимаксного управления [1] обобщается на случай гауссовского многорукого бандита; для простоты рассматривается случай трех действий. Минимаксные стратегия и риск ищутся как байесовские относительно наилучшего априорного распределения.

Теорема. Решим в обратном времени дифференциальное уравнение

$$\min_{\ell=1,2,3} \left\{ \frac{\partial r}{\partial t_\ell} + \frac{1}{2t_\ell^2} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial S_\ell^2} - 2 \frac{\partial^2 r}{\partial S_\ell \partial S_{\bar{\ell}}} + \frac{\partial^2 r}{\partial S_{\bar{\ell}}^2} \right) + g_\ell(S, t, \varrho(w)) \right\} = 0,$$

где $\bar{\ell} - 1 \equiv \ell + 1 \pmod{3}$, $t_\ell \geq t_0$, функции $g_\ell(S, t, \varrho(w))$ зависят от текущих статистик S_ℓ , времен выполнения действий t_ℓ и априорной плотности $\varrho(w)$ ($\ell = 1, 2, 3$). Начальное условие: $r(S_1, t_1, S_2, t_2, S_3, t_3) = 0$ при $t_1 + t_2 + t_3 = 1$. Байесовская стратегия выбирает действие, соответствующее наименьшему текущему значению выражения в левой части уравнения. Для байесовского риска справедлива оценка

$$\lim_{K \rightarrow \infty} K^{-1/2} R_K^B = r(\varrho(w)),$$

где

$$r(\varrho(w)) = \lim_{t_0 \downarrow 0} \iint_{-\infty}^{\infty} r(S_1, t_0, S_2, t_0, -S_1 - S_2, t_0) dS_1 dS_2.$$

Минимаксные стратегия и риск совпадают с байесовскими, для которых $r(\varrho(w))$ максимально по $\varrho(w)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. В. Колногоров, “К предельному описанию робастного параллельного управления в случайной среде”, *Автомат. и телемех.*, 2015, № 7, 111–126; англ. пер.: A. V. Kolnogorov, “On a limiting description of robust parallel control in a random environment”, *Autom. Remote Control*, **76:7** (2015), 1229–1241.

Кондратенко А. Е., Октысюк К. Д., Соболев В. Н., Фролов А. А. (МГУ им. М. В. Ломоносова, РТУ МИРЭА, Москва, Россия). **О максимизации множества ε -типичных последовательностей марковского источника специального типа.**

Справедлива следующая теорема (в ее формулировке используются определения и результаты из [1]–[3]).

Теорема. Пусть $(A, \vec{p}, \mathbb{P}_\alpha)$ — стационарный простой двоичный марковский источник и

$$\mathbb{P}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

⁶⁾Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования “Высокопроизводительные вычисления и большие данные” (ЦКП “Информатика”) ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

Тогда энтропия такого источника имеет вид

$$H_{\infty}(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{1 + \alpha} \log_2(1 - \alpha) - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \log_2 \alpha$$

и

$$\max_{0 < \alpha < 1} H_{\infty}(\alpha) = H_{\infty}(1 - \phi^{-1}) = \log_2 \phi \approx \frac{25}{36},$$

где $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ — золотое сечение. Источник обладает свойством асимптотической равномерности, а при $\alpha := 1 - \phi^{-1}$ и любых $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$ мощность $(1 - \delta)$ -высоковероятного множества ε -типичных последовательностей a^n длины n ограничена и для нее справедливы оценки

$$\frac{1 - \delta}{2^{n\varepsilon}} \phi^n \leq |A_{n,\varepsilon}| \leq 2^{n\varepsilon} \phi^n,$$

которым соответствуют оценки вероятностей появления данных последовательностей:

$$(2^{-\varepsilon} \phi^{-1})^n \leq P_{1,2,\dots,n}(a^n) \leq (2^{\varepsilon} \phi^{-1})^n \quad \text{для любого } a^n \in A_{n,\varepsilon}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. И. Чечета, *Введение в дискретную теорию информации и кодирования*, МЦМНО, М., 2011, 224 с.
2. М. В. Заец, А. Е. Кондратенко, *Задачи по теории информации и кодирования: примеры и решения*, ООО “МАКС Пресс”, М., 2022, 92 с.
3. А. Е. Кондратенко, В. Н. Соболев, “О максимизации энтропии при свертке с равномерным распределением”, *Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки*, **37:1** (2022), 7–11.

Короткова А. С., Чистяков А. Е. (Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия), **Никитина А. В.** (Таганрогский технологический институт ЮФУ, Таганрог, Россия). **Исследование разлива нефти в Азово-Черноморском бассейне на основе стохастического подхода⁷⁾.**

Математическая модель транспорта нефти в Азово-Черноморском бассейне с учетом ее микробиологической деструкции в стохастической постановке представляет собой систему нелинейных уравнений в частных производных типа диффузии-конвекции с реактивными членами [1].

Теорема. Пусть функция $s \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$, $\text{grad } s \in C(\bar{G})$, в области G удовлетворяет задаче Коши

$$s'_t + us'_x = \mu s''_{xx} + f$$

с начальным условием

$$s(x, 0) = s_0(x), \quad x \in \bar{G},$$

⁷⁾Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-71-20001, <https://rscf.ru/project/25-71-20001/>.

и граничным условием

$$s(x, t) = 0, \quad x \in \partial G, \quad t > 0,$$

где u — скорость движения водного потока, μ — коэффициент диффузии, f — функция флуктуации среды. Для устойчивости дискретного аналога уравнения диффузии–конвекции–реакции, а именно разностной схемы повышенного порядка точности

$$\begin{aligned} \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} + uKs_i^{n+\sigma} &= \mu Ds_i^{n+\sigma} + f_i^{n+\sigma}, \\ Ks_{i-1}^{n+\sigma} &= \frac{-s_{i+2}^{n+\sigma} + 8s_{i+1}^{n+\sigma} - 8s_{i-1}^{n+\sigma} + \sigma + s_{i-2}^{n+\sigma}}{12h}, \\ Ds_i^{n+\sigma} &= \frac{-s_{i+2}^{n+\sigma} + 16s_{i+1}^{n+\sigma} - 30s_i^{n+\sigma} + 16s_{i-1}^{n+\sigma} - s_{i-2}^{n+\sigma}}{12h^2} \end{aligned}$$

(здесь s_i^{n+1} и s_i^n — значения расчетной функции на новом и текущем временных слоях, $i = 2, \dots, N-2$, h, τ — шаги по пространству и времени, σ — вес схемы), необходимо, чтобы выполнялись ограничения на шаг по времени: $\tau < 3h^2/(8\mu)$, и на сеточное число Пекле:

$$\text{Pe}^2 < \frac{4}{75\alpha}, \quad \alpha = \frac{\mu\tau}{6h^2}.$$

Для проверки адекватности предложенных вероятностных моделей наблюдений разработан алгоритм, позволяющий анализировать сходимость натуральных (измеренных) и расчетных (на основе разработанной математической модели) данных, основанный на критерии случайности, в котором учитываются значения дисперсий ряда фактических значений параметра и его случайной составляющей, вызванной воздействием элементов случайности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. И. Сухинов, А. М. Атаян, Ю. В. Белова, В. Н. Литвинов, А. В. Никитина, А. Е. Чистяков, “Обработка данных натурных измерений экспедиционных исследований для математического моделирования гидродинамических процессов Азовского моря”, *Вычисл. мех. сплошых сред*, **13:2** (2020), 161–174; англ. пер.: A. I. Sukhinov, A. M. Atayan, Y. V. Belova, V. N. Litvinov, A. V. Nikitina, A. E. Chistyakov, “Processing of field measurement data from expedition research for mathematical modeling of hydrodynamic processes in the Sea of Azov”, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **63:7** (2022), 1166–1179.

Кудрявцев О. Е. (Ростовский филиал Российской таможенной академии, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия). **Моделирование Монте-Карло с использованием искусственных нейронных сетей.**

Используя вероятностные аналоги теорем универсальной аппроксимации [1], мы можем симулировать непрерывные случайные величины с помощью монотонных искусственных нейронных сетей прямого распространения с одномерным входом, выходом и одним скрытым слоем. В частности, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть X — произвольная непрерывная случайная величина, а случайная величина Y имеет логистическую функцию распределения $\sigma(x) = e^x / (1 + e^x)$. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ существует непрерывная случайная величина вида

$$Z = \begin{cases} \alpha_1 Y_1 + \beta_1 & \text{с вероятностью } p_1, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_j Y_j + \beta_j & \text{с вероятностью } p_j, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_N Y_N + \beta_N & \text{с вероятностью } p_N, \end{cases}$$

где $Y_j \sim Y$ независимы, а $p_j > 0$, $\alpha_j > 0$, $\beta_j \in \mathbf{R}$ таковы, что

$$\sum_{j=1}^N p_j = 1, \quad \left| F_X(x) - \sum_{j=1}^N p_j \sigma\left(\frac{1}{\alpha_j}x - \frac{\beta_j}{\alpha_j}\right) \right| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in \mathbf{R}$$

($F_X(x)$ — функция распределения случайной величины X).

Таким образом, любая непрерывная случайная величина может быть успешно аппроксимирована смесью логистических распределений. Следовательно, для ее симуляции достаточно моделировать логистическое распределение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О. Kudryavtsev, N. Danilova, “Applications of artificial neural networks to simulating Lévy processes”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **271**:4 (2023), 421–433.

Кушнарченко Б.М., Фирсов Р.А. (МГУ им. М.В. Ломоносова, Институт “Вега”, ИППИ РАН, Москва, Россия). **О некоторых обобщениях неравенства Лордена.**

Классическое неравенство Лордена (1970) дает оценку сверху для $\sup_{t \geq 0} \mathbf{E} R_t$, где $R_t = S_{N(t)} - t$ есть перескок одномерного случайного блуждания через уровень t .

Пусть $(Z_k)_{k \geq 1}$ — независимые одинаково распределенные векторы из $\mathbf{R}^d$ с неотрицательными координатами. Зафиксируем норму $\|\cdot\|$ и положим

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n Z_k;$$

$$N(t) = \inf\{n \geq 1: \|S_n\| > t\}, \quad R_t = \|S_{N(t)}\| - t.$$

Предположим, что

$$\mathbf{E}\|Z_1\|_1 > 0, \quad \mathbf{E}\|Z_1\|_1^2 < \infty, \quad \mathbf{E}\|Z_1\|^2 < \infty.$$

Теорема 1. Пусть существует $C > 0$ такое, что $C\|x\|_1 \leq \|x\|$ для всех $x \in \mathbf{R}^d$. Тогда

$$\sup_{t \geq 0} \mathbf{E} R_t \leq \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{\|\mathbf{1}\|} \right) \frac{\mathbf{E}\|Z_1\|^2 + \mathbf{E}\|Z_1\|_1^2}{\mathbf{E}\|Z_1\|_1}.$$

Теорема 2. Пусть $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ и $d \geq 1$. Тогда

$$\sup_{t \geq 0} \mathbf{E} R_t \leq 2 \left(\sqrt{d} + \frac{1}{\sqrt{d}} \right) \frac{\mathbf{E} \|Z_1\|_1^2}{\mathbf{E} \|Z_1\|_1}.$$

Заметим, что оценка из теоремы 2 асимптотически оптимальна по порядку величины относительно d и совпадает с классическим результатом Лордена при $d = 1$. Благодаря субаддитивности функции $t \mapsto \mathbf{E} R_t$ и закону больших чисел имеет место асимптотика

$$\frac{\mathbf{E} R_t}{t} \leq \left(\frac{\mathbf{E} \|Z_1\|}{\mathbf{E} \|Z_1\|} - 1 \right) + o(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Полученные оценки применимы, например, в задачах управления портфельным риском. Переход от скалярного риска к вектору доходностей $(Z_k^{(1)}, \dots, Z_k^{(d)})$ делает естественным использование нормы $\|\cdot\|_1$. В частности, теорема 2 дает верхнюю границу порога превышения при ценовом шоке величины t .

Кузнецов Д. Ф. (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия). **Последние результаты по новому подходу к разложению в ряд повторных стохастических интегралов Стратоновича. Кратности от 1 до 8 и выше.**

Теорема 1 [1, разд. 2.22, 2.27, 2.29–2.31]. Пусть $\psi_1(\tau), \dots, \psi_k(\tau) \in C[t, T]$, $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ — произвольная полная ортонормированная система в $L_2[t, T]$ и верно одно из условий (2.1294), (2.1310) или (2.1341) из [1]. Тогда для всех $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$ и $k \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} & \int_t^T \psi_k(t_k) \cdots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \circ d\mathbf{W}_{t_1}^{(i_1)} \cdots \circ d\mathbf{W}_{t_k}^{(i_k)} \\ &= \text{l. i. m.}_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(\tau) d\mathbf{W}_\tau^{(i)}$ — независимые $N(0, 1)$ -распределенные случайные величины ($i \neq 0$), $C_{j_k \dots j_1}$ — коэффициент Фурье для

$$\begin{aligned} K(t_1, \dots, t_k) &= \psi_1(t_1) \cdots \psi_k(t_k) \mathbf{I}_{\{t_1 < \dots < t_k\}} \quad (k \geq 2), \\ K(t_1) &= \psi_1(t_1), \quad t_1, \dots, t_k \in [t, T], \end{aligned}$$

$d\mathbf{W}_\tau^{(i)}$ и $\circ d\mathbf{W}_\tau^{(i)}$ — дифференциалы Ито и Стратоновича, $\mathbf{W}_\tau^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) — независимые стандартные винеровские процессы, $\mathbf{W}_\tau^{(0)} = \tau$.

Теорема 2 [1, разд. 2.1.4, 2.24, 2.32–2.34]. Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ — как в теореме 1. Тогда (1) верно без предположений (2.1294), (2.1310) или (2.1341) из [1] в следующих трех случаях:

- 1) $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau) \in C[t, T]$ ($k = 1, 2$);
- 2) $\psi_1(\tau) = (\tau - t)^{p_1}, \dots, \psi_4(\tau) = (\tau - t)^{p_4}$, $p_1, \dots, p_4 = 0, 1, 2, \dots$ ($k = 3, 4$);
- 3) $\psi_1(\tau), \dots, \psi_6(\tau) \equiv 1$ ($k = 5, 6$).

Теорема 3 [1, разд. 2.36, 2.37]. Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ — полная ортонормированная система многочленов Лежандра или тригонометрический базис Фурье в $L_2[t, T]$. Тогда (1) верно без предположений (2.1294), (2.1310) или (2.1341) из [1] для случая $\psi_1(\tau), \dots, \psi_8(\tau) \equiv 1$ ($k = 7, 8$).

Приведенные выше теоремы полезны для численного решения стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений с некоммутативным шумом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. F. Kuznetsov, “Strong approximation of iterated Itô and Stratonovich stochastic integrals based on generalized multiple Fourier series. Application to numerical solution of Itô SDEs and semilinear SPDEs”, 2025 (v1 – 2020, v66 – 2025), 1218 с., [arXiv: 2003.14184v66](#).

Лебедев А. В. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия). **Трехмерные полиномиальные копулы и нетранзитивные наборы случайных величин.**

Данная работа продолжает исследование [1]. Рассмотрим случайный вектор (X_1, X_2, X_3) с полиномиальной плотностью на $[0, 1]^3$ вида

$$p(x_1, x_2, x_3) = 1 + \sum_{i=1}^3 a_i x_i + \sum_{j=1}^3 b_j x_j^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_i x_j^2, \quad (1)$$

где C — матрица размера 3×3 с диагональными элементами $c_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq 3$, в предположении $p(x_1, x_2, x_3) \geq 0$.

Теорема. Плотность (1) в случае кососимметричной матрицы C определяет копулу при условиях

$$a_i = -\frac{c_{ij} + c_{ik}}{3}, \quad b_i = -\frac{c_{ji} + c_{ki}}{2},$$

где все i, j, k различны, $1 \leq i, j, k \leq 3$, и обладает свойством нетранзитивности тогда и только тогда, когда $C = AC^0$, где A — положительное число и C^0 — кососимметричная матрица с элементами

$$\begin{aligned} c_{12}^0 &= \frac{10}{32}w_1 + \frac{11}{32}w_2 + \frac{11}{32}w_3, \\ c_{23}^0 &= \frac{11}{32}w_1 + \frac{10}{32}w_2 + \frac{11}{32}w_3, \\ c_{31}^0 &= \frac{11}{32}w_1 + \frac{11}{32}w_2 + \frac{10}{32}w_3 \end{aligned}$$

при $0 < w_i < 1$, $1 \leq i \leq 3$, $w_1 + w_2 + w_3 = 1$, при этом

$$\mathbf{P}(X_i < X_j) = \frac{1}{2} + \frac{A(1 - w_i)}{360}, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

где j — следующий за i индекс в цикле $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. В. Лебедев, “Многомерные непрерывные распределения и копулы, порождающие нетранзитивные наборы зависимых случайных величин”, *Автомат. и телемех.*, 2025, № 4, 55–70.

Литвинов В. Н., Чистяков А. Е., Поркшеян М. В. (Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия). **Вероятностная оценка времени решения сеточных уравнений на графическом ускорителе⁸⁾.**

Поиск решения сеточных уравнений, полученных в результате дискретизации математической модели гидродинамики, выполнялся модифицированным попеременно-треугольным итерационным методом (МПТМ), являющимся развитием метода из [1], на графическом ускорителе с применением технологии NVIDIA CUDA. Целью исследования являлось получение оценки времени решения сеточных уравнений методом МПТМ на графическом ускорителе в зависимости от параметров декомпозиции трехмерной расчетной области. Численные эксперименты проводились на вычислительном кластере К-60 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. В результате исследования сформулирована следующая теорема.

Теорема. *Время решения сеточных уравнений методом МПТМ на графическом ускорителе не превышает величины*

$$T_{\text{GPU}} \leq T_{\text{TR1}} + 2N_{\text{it}} \sum_{s=1}^{N_s} \max(\mathbf{T}_s) + T_{\text{TR2}},$$

$$N_s = N_x N_z + N_y - 1,$$

где T_{TR1} , T_{TR2} — среднее время, требуемое для передачи структур данных, описывающих сеточное уравнение, из оперативной памяти в видеопамять и обратно соответственно; N_{it} — среднее значение числа итераций, требуемое для получения решения методом МПТМ; s , N_s — номер шага и количество шагов параллельно-конвейерного вычислительного процесса соответственно; $\mathbf{T}_s$ — вектор, содержащий значения 95-го перцентиля времени, затраченного на вычисление значений расчетной функции для параллельно обрабатываемых фрагментов расчетной сетки всеми вычислителями на шаге s ; N_x , N_y , N_z — количество фрагментов расчетной сетки по пространственным координатам x , y , z соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. I. Sukhinov, V. N. Litvinov, A. E. Chistyakov, A. V. Nikitina, N. N. Gracheva, N. B. Rudenko, “Solving grid equations using the alternating-triangular method on a graphics accelerator”, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Выч. матем. информ.*, **12:2** (2023), 78–92.

Мартынов Г. В. (ИППИ РАН, Москва, Россия). **Применение статистик Крамера–Мизеса и Колмогорова–Смирнова к проверке гипотез о формах смесей распределений Вейбулла.**

⁸⁾Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-71-20001, <https://rscf.ru/project/25-71-20001/>.

Пусть получена выборка из смеси двух неизвестных распределений. Необходимо проверить гипотезу о том, что эта выборка имеет распределение, являющееся смесью двух распределений Вейбулла с (возможно, различными) неизвестными параметрами. Семейство таких распределений имеет вид

$$\{F(x; \theta)\} = \rho W(x; \lambda_1, k_1) + (1 - \rho)W(x; \lambda_2, k_2),$$

где $\theta = (\lambda_1, k_1, \lambda_2, k_2, \rho)$, $0 < x < \infty$, $\lambda_1 > 0$, $k_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $k_2 > 0$, $\rho > 0$ и функция $W(x; \lambda, k)$ является стандартной функцией распределения Вейбулла.

Теорема. *Предельная ковариационная функция эмпирического процесса, полученного по конечному числу наблюдений, при выполнении некоторых условий регулярности имеет вид*

$$C(t, \theta) = \min(t, \tau) - t\tau - q^\top(t; \theta)I^{-1}(\theta)q(\tau; \theta),$$

где

$$q(s; \theta) = \left. \frac{d}{d\theta} F(x; \theta) \right|_{x=F^{-1}(s; \theta)}$$

и $I(\theta)$ — информационная матрица Фишера.

Предполагается, что эмпирические процессы распределения используют оценку максимального правдоподобия для вектора параметров θ .

Предельное распределение зависит от пяти неизвестных параметров. Поэтому при определении критических уровней вместо неизвестного значения параметра θ используется его оценка.

Муравлёв А. А., Якимив А. Л. (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия). **Асимптотические свойства некоторых случайных величин, определяемых через моменты остановки броуновского движения.**

В работах [1] и [2] были найдены выражения для преобразований Лапласа некоторых моментов остановки броуновского движения со сносом (связанных с падением и ростом процесса). Однако они являются достаточно громоздкими и сложными для дальнейшего анализа. Тем не менее, как недавно доказано первым автором, их изучение может быть сведено к исследованию трех семейств случайных величин, преобразование Лапласа которых имеет гораздо более простой вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}e^{-\lambda X^a} &= \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\operatorname{sh}(a\sqrt{2\lambda})}, \\ \mathbf{E}e^{-\lambda Y^{a,y}} &= \frac{a \operatorname{sh}(y\sqrt{2\lambda})}{y \operatorname{sh}(a\sqrt{2\lambda})}, \\ \mathbf{E}e^{-\lambda Z^{a,z}} &= e^{z/a} e^{-z\sqrt{2\lambda} \operatorname{cth}(a\sqrt{2\lambda})}, \end{aligned}$$

где $a > y > 0$, $z > 0$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathbf{P}\{X^a > t\}}{t} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathbf{P}\{Y^{a,y} > t\}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathbf{P}\{Z^{a,z} > t\}}{t} = -\frac{\pi^2}{2a^2}. \end{aligned}$$

При доказательстве теоремы существенно используется тауберова теорема 2 из [3] и критерий 2 из [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Муравлёв, “О моментах остановки, связанных с падением и ростом броуновского движения со сносом”, *УМН*, **63**:6(384) (2008), 171–172; англ. пер.: А. А. Muravlev, “On stopping times connected with drawdowns and rallies of a Brownian motion with drift”, *Russian Math. Surveys*, **63**:6 (2008), 1149–1151.
2. А. А. Муравлёв, “О моментах остановки, связанных с падением и ростом броуновского движения со сносом”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **55**:3 (2010), 615–616.
3. K. Nakagawa, “Application of Tauberian theorem to the exponential decay of the tail probability of a random variable”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **53**:9 (2007), 3239–3249.
4. S. Benaim, P. Friz, “Smile asymptotics. II. Models with known moment generating functions”, *J. Appl. Probab.*, **45**:1 (2008), 16–32.

Мурзинцева А. А., Пчелинцев Е. А. (Томский государственный университет, Томск, Россия). **Робастное управление портфелем в моделях финансовых рынков с транзакционными издержками**⁹⁾.

В работе изучается задача оптимального управления на финансовом рынке Блэка–Шоулса с транзакционными издержками при логарифмических полезностях. Безрисковый актив эволюционирует согласно уравнению

$$dB_t = r(t)B_t dt, \quad B_0 = 1,$$

а рисковый — согласно уравнению

$$dS_t = \mu(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t, \quad S_0 > 0.$$

Здесь процентная ставка $r(t)$, тренд $\mu(t)$ и волатильность $\sigma(t)$ — непрерывные действительные функции на $[0, T]$, а $(W_t)_{t \geq 0}$ — стандартный винеровский процесс. Пусть $\lambda = (r(t), \mu(t), \sigma(t))_{0 \leq t \leq T}$ — рыночный параметр из некоторого компакта $\Lambda \subset C^1([0, T], \mathbf{R}^3)$. Задача решается методом стохастического динамического программирования. Как и в [1], доказывается теорема верификации, которая гарантирует, что решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана дает оптимальную стратегию $v^* = (\theta^*(t), c^*(t))_{0 \leq t \leq T}$, для которой получены явные формулы для доли инвестирования в рисковый актив и уровня потребления. Затем, с использованием подхода Леланда–Лепинетта [2], полученная стратегия дискретизируется до $\nu^{(n)}$, т.е. рассматривается для малых издержек ($\kappa_n = o(n^{-1/2})$ при $n \rightarrow \infty$) в моменты времени $t_k = kT/n$, а для больших ($\sqrt{n}\kappa_n$ не стремится к нулю) — в моменты $t_k = (k/n)^q T$, $k = 1, \dots, n$, где степень $q = q_n \geq 1$ такова, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{q_n}{n} + \kappa_n \right) \ln q_n = 0.$$

Доказана следующая теорема.

⁹⁾Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-000191, <https://rscf.ru/project/24-11-00191/>.

Теорема. Стратегия $\nu^{(n)}$ является асимптотически робастной и оптимальной, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} |J_\lambda(x, \nu^{(n)}) - J_\lambda^*(x)| = 0,$$

где $J_\lambda^*(x)$ — оптимальное значение целевого функционала

$$J(x, \nu) = \mathbf{E}_{x, \lambda} \left[\int_0^T \ln(c_u X_u) du + \ln X_T \right],$$

$x > 0$ — начальный капитал и X_t — капитал портфеля в момент t .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Egorov, S. M. Pergamenchikov, “Optimal investment and consumption for financial markets with jumps under transaction costs”, *Finance Stoch.*, **28**:1 (2024), 123–159.
2. E. Lepinette, “Modified Leland’s strategy for a constant transaction costs rate”, *Math. Finance*, **22**:4 (2012), 741–752.

Насыров Ф. С. (УУНиТ, Уфа, Россия). **О принципе максимума с потракторным функционалом качества для одномерных стохастических дифференциальных уравнений.**

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{H}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P})$ — фильтрованное вероятностное пространство, где (H_t) порождена случайным процессом $V(t)$, $t \in [0, T]$, с непрерывными реализациями. Рассматривается задача минимизации функционала с потракторным функционалом качества

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T f_0(t, x(t), u(t)) dt + h_0(T, x(0), x(T))$$

в классе неупреждающих кусочно непрерывных управлений $u(t) \in U$ при ограничениях вида

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(s, x(s), u(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, x(s), u(s)) * dV(s), \quad t \in [0, T],$$

где второй интеграл в правой части есть симметричный интеграл.

Теорема. Пусть функции $b(t, x, u)$, $\sigma(t, x, u)$, $f_0(t, x, u)$, $h_0(T, x(0), y)$ дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим переменным, а функция $\sigma(t, x, u)$ отлична от нуля при всех (t, x, u) . Пусть $(x(s), \psi(s), C(s))$ есть решение системы

$$\begin{cases} dx(s) = b(s, x(s), u(s)) ds + \sigma(s, x(s), u(s)) * dV(s), \\ d\psi(s) = [(f_0)'_x(s, x(s), u(s)) - \psi(s)b'_x(s, x(s), u(s))] ds - C(s) * dV(s), \\ x(0) = x_0, \quad \psi(T) = -h'_x(T, x(0), x(T)), \quad s \in [0, T], \end{cases} \quad (1)$$

где функция $u(s) = u^*(s, x, \psi)$ найдена из условия максимума

$$H^{(1)}(s, x, \psi, u^*(s, x, \psi)) = \max_{u \in U} H^{(1)}(s, x, \psi, u),$$

где

$$H^{(1)}(s, x, \psi, u) = \psi b(s, x, u) - f_0(s, x, u).$$

Тогда система (1) является краевой задачей принципа максимума для исследуемой задачи, т.е. пара $(x(s), \psi(s))$ удовлетворяет необходимым условиям принципа максимума.

Функции $x(s)$, $\psi(s)$, $C(s)$ могут быть найдены из системы (1) методом, предложенным автором в этой работе. Ранее эта задача была решена (см. [1], [2]) в предположении, что управление в стохастическом дифференциальном уравнении на $x(s)$ воздействует только на первое слагаемое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. Nasyrov, “The pathwise-determined maximum principle and symmetric integrals”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **266**:6 (2022), 817–830.
2. F. Nasyrov, “On the maximum principle for stochastic differential equations with a path-wise cost functional”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **280**:5 (2024), 710–723.

Паутов М.А. (Институт AIRI, Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН, Москва, Россия). **Об устойчивых водяных знаках для цифровых объектов.**

Пусть $k \gg n > \tau \in \mathbf{N}$, Σ есть множество строк конечной длины, $f_\theta: \mathcal{X} \subset \Sigma \rightarrow \mathcal{Y} \subset \mathbf{R}^k$ есть параметрическое отображение, $Q = [0, \tau]$ и $\|\cdot\|$ есть расстояние Хэмминга. Пару (e, d) отображений $e: \mathcal{Y} \times \{0, 1\}^n \rightarrow \mathcal{Y}$, $d: \mathcal{Y} \rightarrow \{0, 1\}^n$ назовем (τ, p, δ) -вложением водяного знака $w \in \{0, 1\}^n$ в объект $f(x) = y \in \mathcal{Y}$, если

$$\begin{cases} \|d(e(f(x), w)) - w\| = 0, \\ \mathbf{P}_{w' \sim \{0, 1\}^n} (\|d(e(f(x), w)) - w'\| \in Q) \leq p, \\ \mathbf{P}_{y \sim \mathcal{Y}} (\|d(y) - w\| \in Q) \leq \delta. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим пару (e, d) , заданную следующим образом. Для данного сообщения $w \in \{0, 1\}^n$ и объекта $y \in \mathcal{Y}$ зафиксируем последовательность $s = \{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$, состоящую из $2n$ пар уникальных индексов $a_i, b_i \in [1, \dots, k]$. Построение $e(y, w | s)$ осуществляется путем минимизации функционала $L(y, w, s) = \sum_{i=1}^n \min((-1)^{w_i}(y_{a_i} - y_{b_i}), 0)$:

$$\begin{cases} y^t = y^{t-1} - \eta_t \nabla_{y^t} L(y^t, w, s), \\ y^0 = f(x). \end{cases} \quad (2)$$

Предположим, что на некотором шаге T верно, что $\|d(y^T) - w\| = 0$. Определим $e(y, w | s) = y^T$. Для пары (y, s) определим $d(y | s)$ поэлементно: $d(y)_i = \mathbf{I}\{y_{a_i} < y_{b_i}\}$. Для пары (y, s) положим $\Delta_i = |y_{a_i} - y_{b_i}|/2$.

Теорема. Пусть $\Delta_{j_1} \leq \Delta_{j_2} \leq \dots \leq \Delta_{j_n}$ и $\varepsilon \in \mathbf{R}^k$. Тогда если $\|\varepsilon\|_\infty \leq \Delta_{i_\tau}$, то $\|d(y) - d(y + \varepsilon)\| \in Q$.

Павлов И. В. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия), **Неумержицкая Н. В.** (РТУ МИРЭА, Москва, Россия). **О знакопеременных мартингальных интерполяционных мерах.**

В настоящей работе тематика, связанная с хааровскими интерполяциями финансовых рынков, переносится с классических мартингальных мер на “неклассические” знакопеременные мартингальные меры. Эта идея, позволяющая интерполировать не только безарбитражные рынки, но и большой класс арбитражных рынков, предложена А. Н. Ширяевым. Рассмотрим стохастический базис $(\Omega, F = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^K, \mathbf{P})$ (множество Ω конечно, $K < \infty$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$), и пусть $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^K$ — некоторый процесс, а μ — знакопеременная мера на $\mathcal{F}_K$. Пусть A — атом в $\mathcal{F}_k$ ($0 \leq k < K$), B_i ($i = 1, \dots, m$) — атомы в $\mathcal{F}_{k+1}$ и $A = B_1 + \dots + B_m$, $a := Z_k|_A$, $b_i := Z_{k+1}|_{B_i}$, $\mu_i := \mu(B_i)$ (индекс ветвления m атома A и числа a , b_i , μ_i зависят от A). Знакопеременную меру μ будем называть допустимой, если $\mu(\Omega) = 1$ и $\mu(A) \neq 0$ для любого $A \in \mathcal{F}_K$. Множество допустимых мартингальных мер обозначим через $\mathcal{M}$.

Теорема. Пусть для любого k такого, что $0 \leq k < K$, и для любого атома $A \in \mathcal{F}_k$ выполняется неравенство $m \geq 2$ и числа $a, b_1, \dots, b_m$ различны. Тогда множество допустимых знакопеременных мартингальных мер μ , удовлетворяющих (интерполяционному) свойству универсальной хааровской единственности СУХЕ (см. обзор [1]), плотно в $\mathcal{M}$ в естественной евклидовой метрике.

В докладе приводится и ряд других результатов, связанных с знакопеременными интерполяционными мартингальными мерами (некоторые из них содержатся в [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. V. Pavlov, “Haar uniqueness properties and modelling of financial markets interpolations”, *Stoch. Model. Comput. Sci.*, **3**:2 (2023), 189–214.
2. I. V. Pavlov, “On Haar interpolations of financial markets by signed martingale measures”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **289**:3 (2025), 426–434.

Переварюха А. Ю. (СПб ФИЦ РАН, Санкт-Петербург, Россия. **Гибридная модель волн COVID-19 с учетом стохастической эволюции**¹⁰⁾.

Предложена гибридная модель COVID-волн как не полностью детерминированного процесса со стохастическим фактором эволюции вируса при уклонении от популяционного иммунитета для анализа влияния накопления адаптационных мутаций на переход в новый эпидемический режим. Фактор активации новой волны COVID задан в гибридной структуре с условными переходами $P_i(A_f)$ на основе градации аффинности связывания S -белка с рецептором клетки и перехода к новой форме волн у более аффинного штамма $\Delta A_f > 0.1$ из-за стабилизирующего эволюционного отбора. Включим в уравнения сменяющихся режимов колебаний $N(t - \tau_1 \gamma), Y(t - T \gamma)$ возмущение запаздывания τ_1, T

¹⁰⁾ Работа выполнена в рамках бюджетной темы СПб ФИЦ РАН.

равномерно распределенной случайной величиной γ в диапазоне $\gamma(\omega) \in [1, 2]$:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = R_2 Y(t) \exp(-\varsigma Y(t - \gamma T) - \varepsilon \sqrt{(J - N^2(t - T))}) & (P_1(A_f)), \\ \frac{dN}{dt} = R_1 N(t) \ln \frac{\mathcal{K}}{N(t - \tau\gamma)} - \frac{\delta N^2(t - \tau_1\gamma)}{(J - Y(t - \psi))^2} - \varphi Y(t) & (P_2(A_f)). \end{cases} \quad (1)$$

Модель имитирует активации серий колебаний с ростом набора случайных мутаций при достаточной аффинности $A_f > \bar{A}_f$. При $J < Y(0) < \mathcal{K}$, $N(0) > \mathcal{K}$ изменится режим затухания волн. Положения экстремумов цикла $N_*(t)$ и ограничения $\max N_*(t) < J$, $\min N_*(t) > L$ зависят от $\tau\gamma(t) = \text{const}$, $t \in [T_{0N}, T_{tN}]$. Частные режимы волн затухают:

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} |\max N_*(t) - \min N_*(t)| \rightarrow 0,$$

но при условиях переходов между осциллирующими решениями на смежных интервалах $t \in [T_{0N}, T_{tN}]_i \cup [T_{0Y}, T_{tY}]_j$ режимы колебаний в (1) сохраняются.

Теорема. Пусть установлен порог репродуктивного числа вируса $R_i > \hat{R}$ и $N(0) > Y(0) > L > 0$. Тогда гибридная система (1) поддерживает незатухающие осцилляции и не существует $t_{\min}$ такого, что $\min N_*(t_{\min}; R_1\tau_1\gamma) < 0$, но $\min Y_*(t; R_2\mathcal{T}\gamma) > \epsilon$ для любого t .

Платонова М. В. (ПОМИ РАН, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия). **О надкритическом ветвящемся случайном блуждании на графе, периодическом относительно части координат**¹¹⁾.

Рассмотрим ветвящееся случайное блуждание с непрерывным временем на решетке $\mathbf{Z}^d$ с источниками ветвления, расположенными в точках решетки

$$\Gamma = \{(m, n) \in \mathbf{Z}^d : m = 0 \in \mathbf{Z}^{d_1}, n \in \mathbb{Z}^{d_2}\}.$$

Предположим, что все источники ветвления одинаковые и имеют интенсивность β . Перемещение частиц в пространстве определяется марковским процессом с непрерывным временем, пространством состояний $\mathbf{Z}^d$ и переходными вероятностями, задаваемыми матрицей переходных интенсивностей $\{a(v, u)\}_{v, u \in \mathbf{Z}^d}$, на которую накладываются следующие условия: $a(v, u) \geq 0$, $v \neq u$, и $a(v, v) < 0$, $\sum_{u \in \mathbf{Z}^d} a(v, u) = 0$ для любого $v \in \mathbf{Z}^d$, а также условие симметричности и однородности по пространству: $a(v, u) = a(u, v) = a(v - u, 0)$. Также предположим, что дисперсия скачков случайного блуждания конечна и случайное блуждание неприводимо.

Через $M(v, u, t)$ обозначим среднее число частиц в момент времени t в точке u , если в начальный момент времени $t = 0$ у нас была одна частица, которая находилась в точке v . Если $d_1 = 1$ или $d_1 = 2$, положим $\beta_c = 0$, а при $d_1 \geq 3$ положим

$$\beta_c^{-1} = \int_0^\infty p(t, 0, 0) dt > 0,$$

¹¹⁾Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-30002, <https://rscf.ru/project/19-71-30002/>.

где $p(t, x, y)$ — переходная вероятность случайного блуждания, лежащего в основе ветвящегося случайного блуждания. Через λ обозначим правый край спектра генератора ветвящегося случайного блуждания.

Теорема. Пусть $\beta > \beta_c$. Тогда $\lambda > 0$ и при $t \rightarrow +\infty$ для функции $M(v, u, t)$ выполнено асимптотическое равенство

$$M(v, u, t) = C(v, u, \beta, d_2) e^{\lambda t} t^{-d_2/2} (1 + o(1)).$$

Пресман Э.Л. (ЦЭМИ РАН, Москва, Россия), **Жанг Йи** (Университет Бирмингема, Бирмингем, Великобритания). **О стохастическом нелинейном дисконтировании.**

Рассматривается задача нелинейного дисконтирования в стохастической постановке. Показывается, что при естественных предположениях она сводится к стандартной задаче стохастического оптимального управления с минимизацией суммарных издержек, и строится оптимальное управление.

Пусть $h = \{x_i\}_{i=0}^\infty$ — последовательность случайных элементов борелевского пространства X , $u(x_i) \geq 0$ определяет текущую стоимость (полезность) величины x_i , а $w(x_i) \geq 0$ определяет финальную стоимость (полезность). Пусть $h_{r,n} = \{x_i\}_{i=r}^n$, $\{\mathcal{F}_i\}_{i=0}^\infty$ — такая фильтрация σ -алгебр, что $\mathcal{F}_i \subseteq \sigma(h_{0,i})$, $\mathcal{F}_i$ не принадлежит $\sigma(h_{0,i-1})$, $\mathcal{F}_{-1}$ состоит из всего пространства и пустого множества, а $\gamma(u)$ — такая неотрицательная вогнутая функция на $[0, \infty)$, что $\gamma(u) - \gamma(0) < u$ для $u > 0$ (например, $\gamma(u) = \ln(1 + u)$).

В [1]–[3] в качестве нелинейной дисконтированной стоимости при заданном n рассматривалось значение $U_n = U_{n,n}$, которое определялось последовательно следующим образом:

$$\begin{aligned} U_{n,0} &= \mathbf{E}\{w(x_n) | \mathcal{F}_{n-1}\}, \\ U_{n,r} &= \mathbf{E}\{[u(x_{n-r}) + \gamma(U_{n,r-1})] | \mathcal{F}_{n-r-1}\}, \quad 1 \leq r \leq n. \end{aligned} \quad (1)$$

Если $\gamma(u) = ku$, где $0 < k < 1$, то мы имеем стандартную дисконтированную суммарную стоимость.

Пусть

$$B = \{b = (k, \delta) : k(u + \delta) \geq \gamma(u) \text{ для всех } u \geq 0\}.$$

Последовательность пар функций $\mu = \{\mu_i = (\kappa_i, \delta_i)\}_{i=0}^\infty$, принимающих значения в B и таких, что μ_i измеримы относительно $\mathcal{F}_i$, $i \geq 0$, будем называть стратегией игрока. Множество всех возможных стратегий обозначим $\mathcal{B}$.

Предположим, что мы имеем игрока, который в каждый момент времени i может с вероятностью κ_i остановить наблюдения (в этом случае текущая стоимость во все последующие моменты будет равна нулю), а с дополнительной вероятностью продолжить (и тогда стоимость в момент $i + 1$ будет $\tilde{u}(x_{i+1}) = u(x_{i+1}) + \delta_i$). Пусть τ — соответствующий момент остановки, положим $z_i = x_i$, если $i \leq \tau$, $z(x_i) = \Delta$, если $i > \tau$, и $\tilde{u}(\Delta) = 0$, и пусть $\mathbf{E}^\mu$ — математическое ожидание, отвечающее стратегии μ .

Теорема. Для любого $n > 0$ существует стратегия $\bar{\mu}^{(n)} = (\bar{\mu}_0^{(n)}, \dots, \bar{\mu}_{n-1}^{(n)})$ такая, что

$$U_n = \inf_{\mu \in \mathcal{B}} U_n^\mu = U_n^{\bar{\mu}^{(n)}} = \mathbf{E}^{\bar{\mu}^{(n)}} \left\{ u(z_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{u}(z_i) + \tilde{w}(z_n) \right\}. \quad (2)$$

Если $w(x) \leq u(x)$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} U_n < \infty$, то существует $U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n < \infty$, которое не зависит от $w(\cdot)$, и стратегии $\bar{\mu}^{(n)}$ можно выбрать так, что для любого $i \geq 0$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}_i^{(n)} = \bar{\mu}_i$, при этом в соотношении (2) можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Jaśkiewicz, J. Matkowski, A. S. Nowak, "Persistently optimal policies in stochastic dynamic programming with generalized discounting", *Math. Oper. Res.*, **38**:1 (2013), 108–121.
2. N. Bäuerle, A. Jaśkiewicz, A. S. Nowak, "Stochastic dynamic programming with non-linear discounting", *Appl. Math. Optim.*, **84**:3 (2021), 2819–2848.
3. A. Piunovskiy, E. Presman, Y. Zhang, X. Zheng, "Reduction of a Markov decision process with non-linear discounting to a stochastic game with standard total undiscounted criterion", *Ann. Oper. Res.*, 2025, 1–19, Publ. online.

Ратанов Н. Е. (Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия). **Дробные телеграфные уравнения и дробно-интегрированные телеграфные процессы**¹²⁾.

Пусть $\varepsilon(t) \in \{0, 1\}$ — марковский процесс с двумя состояниями и с чередующимися параметрами переключения состояний $\lambda_0, \lambda_1 > 0$. Для дробно-интегрированного телеграфного процесса

$$\mathcal{F}^\alpha(t) = I^\alpha[c_\varepsilon(\cdot)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} c_{\varepsilon(s)} ds, \quad c_0 > c_1, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

доказаны следующие соотношения.

Теорема 1. Немарковский дробно-интегрированный телеграфный процесс $\mathcal{F}^\alpha(t)$ представляется через бесконечномерный (марковский) процесс Каца–Орнштейна–Уленбека $Z_\beta(t)$, $\beta \in (0, \infty)$:

$$\mathcal{F}^\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \beta^{-\alpha} Z_\beta(t) d\beta.$$

Здесь

$$dZ_\beta(t) = [-\beta Z_\beta(t) + c_{\varepsilon(t)}] dt, \quad t > 0; \quad Z_\beta(0) = 0.$$

В симметрическом случае $c_0 = -c_1 = c$, $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$ получены асимптотики моментов.

Теорема 2. При $t \rightarrow +\infty$ имеем

$$\mathbf{E}[\mathcal{F}^\alpha(t)] \sim \frac{t^{\alpha-1}}{2\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{c}{\lambda}$$

¹²⁾Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00245, <https://rscf.ru/project/24-21-00245/>.

и

$$\mathbf{E}[\mathcal{F}^\alpha(t)^2] \sim \begin{cases} \frac{t^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\alpha)^2} \frac{c^2}{\lambda}, & \text{если } \alpha > \frac{1}{2}, \\ \frac{2\ln(2\lambda t)}{\pi^{3/2}} \frac{c^2}{\lambda}, & \text{если } \alpha = \frac{1}{2}, \\ \frac{2K_\alpha}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{c^2}{\lambda^{2\alpha}}, & \text{если } 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Рохлин Д. Б., Гуртовая О. В. (Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия). **Двойной алгоритм Вовка–Азури–Вармута на основе случайных признаков для многоядерного онлайн-обучения.**

Предлагается алгоритм многоядерного обучения VAW² для задачи онлайн-регрессии с квадратичной функцией потерь в гильбертовых пространствах с воспроизводящим ядром (RKHS). Алгоритм Вовка–Азури–Вармута (VAW) [1, п. 11.8] используется для построения стратегий экспертов на основе случайных признаков, сгенерированных для каждого ядра на первом уровне, а затем применяется снова для комбинирования их предсказаний на втором уровне.

Пусть $\mathcal{H}_j$ — RKHS с трансляционно-инвариантными воспроизводящими ядрами:

$$k_j(x, y) = \kappa_j(x - y), \quad \kappa_j(z) = \int_{\mathbf{R}^d} q_j(\omega) \cos\langle \omega, z \rangle d\omega,$$

где q_j — некоторые функции плотности вероятности. Каждому такому ядру мы поставим в соответствие вектор случайных фурье-признаков [2]

$$\Phi_{\theta_j}(x) = (\sqrt{2} \cos(\langle \omega_{j,k}, x \rangle + b_{j,k}))_{k=1}^m, \quad \theta_j = (\omega_{j,k}, b_{j,k})_{k=1}^m,$$

где $\omega_{j,k} \sim q_j$, $b_{j,k} \sim U(0, 2\pi)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть $(x_t, y_t) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$, $|y_t| \leq Y$, — произвольная последовательность. Обозначим через $B_R(\mathcal{H}_j)$ шар радиуса R в $\mathcal{H}_j$.

Теорема. Пусть векторы $w_{t,j} \in \mathbf{R}^m$ получены применением алгоритмов VAW к $(\Phi_{\theta_j}(x_t), y_t)$ и вектор $\alpha_t \in \mathbf{R}^N$ получен применением алгоритма VAW к (z_t, y_t) , где z_t — вектор предсказаний экспертов:

$$z_t = (\langle w_{t,1}, \Phi_{\theta_1}(x_t) \rangle, \dots, \langle w_{t,N}, \Phi_{\theta_N}(x_t) \rangle).$$

Тогда

$$\mathbf{E} \sum_{t=1}^T (\langle \alpha_t, z_t \rangle - y_t)^2 \leq \min_{1 \leq j \leq N} \inf_{f_j \in B_R(\mathcal{H}_j)} \sum_{t=1}^T (y_t - f_j(x_t))^2 + O((R^2 + Y^2 \ln T) \sqrt{T})$$

при условии, что $m \propto \sqrt{T}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N. Cesa-Bianchi, G. Lugosi, *Prediction, learning, and games*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006, xii+394 pp.
2. A. Rahimi, B. Recht, “Random features for large-scale kernel machines”, *NIPS’07: Proceedings of the 21st international conference on neural information processing systems*, Adv. Neural Inf. Process. Syst., **20**, 2007, 1177–1184, <https://dl.acm.org/doi/10.5555/2981562.2981710>.

Рохлин Д. Б., Карапетянц Г. А. (Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия). **Ансамблирование VAW-экспертов с дисконтированием при помощи мета-алгоритма VAW.**

В работе [1] был предложен алгоритм Вовка–Азури–Вармута с дисконтированием (DVAW), адаптирующий алгоритм VAW к нестационарным средам. Основываясь на этой работе, мы предлагаем концептуально более простую ансамблевую архитектуру, VE-DVAW, в которой стандартный алгоритм VAW сам используется в качестве метаалгоритма. Для квадратичной функции потерь

$$\ell_t(w) = \frac{1}{2}(\langle w, x_t \rangle - y_t)^2$$

получены оценки динамического сожаления

$$R_T(\mathbf{u}) = \sum_{t=1}^T \ell_t(w_t) - \sum_{t=1}^T \ell_t(u_t),$$

которое измеряет суммарные потери относительно последовательности решений $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_T)$, выбранной апостериори.

Теорема. *Предположим, что последовательность данных и сравниваемая последовательность равномерно ограничены:*

$$\|x_t\|_2 \leq a, \quad |y_t| \leq Y \quad \text{и} \quad \|u_t\|_2 \leq R \quad \text{для всех } t.$$

Пусть алгоритм VE-DVAW представляет собой ансамбль из $M = O(\ln T)$ DVAW-экспертов, чьи коэффициенты дисконтирования выбраны из геометрической сетки, и их предсказания агрегируются метаалгоритмом VAW. Тогда для его динамического сожаления справедлива оценка

$$R_T(\mathbf{u}) = O((\ln T)^2 + \sqrt{TP_T(\mathbf{u})}),$$

$$P_T(\mathbf{u}) = \sum_{t=1}^{T-1} \|u_{t+1} - u_t\|_2.$$

Численные эксперименты подтверждают, что VE-DVAW значительно превосходит стандартный VAW в нестационарных сценариях, оставаясь при этом робастным в стационарных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Jacobsen, A. Cutkosky, “Online linear regression in dynamic environments via discounting”, *ICML’24: Proceedings of the 41st international conference on machine learning*, Proceedings of Machine Learning Research (PMLR), **235**, 2024, 21083–21120, <https://proceedings.mlr.press/v235/jacobsen24a.html>.

Ряднова Е. М. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия). **РА-тесты для авторегрессионных моделей.**

Рассмотрим стационарную авторегрессионную модель $AR(p)$:

$$u_t = \beta_1 u_{t-1} + \dots + \beta_p u_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbf{Z},$$

где $\{\varepsilon_t\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с неизвестной функцией распределения G и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ — неизвестные параметры такие, что корни характеристического уравнения $x^p = \beta_1 x^{p-1} + \dots + \beta_p$ лежат внутри единичного круга. По наблюдениям $u_{1-p}, \dots, u_n$ введем новый класс тестов для проверки гипотезы $H_0: \beta = \beta_0$ на основе остаточных автоковариаций $\Gamma_{tn}^{\varphi\psi}(\beta) := \sum_{k=1}^{n-t} \varphi(\varepsilon_k(\beta))\psi(\varepsilon_{k+t}(\beta))$ с некоторыми специальными функциями φ, ψ , где $\varepsilon_t(\beta) := u_t - \beta_1 u_{t-1} - \dots - \beta_p u_{t-p}$. Определим последовательность $\{\delta_t(\beta)\}$ по рекуррентной формуле $\delta_t(\beta) = \beta_1 \delta_{t-1} + \dots + \beta_p \delta_{t-p}$, $t \in \mathbf{N}$, с начальными значениями $\delta_{1-p} = \dots = \delta_{-1} = 0$, $\delta_0 = 1$. Тогда RA-тестовую статистику зададим p -вектором

$$\mathbf{T}_n^{\varphi\psi}(\beta_0) := \sum_{t=1}^{n-1} \Gamma_{tn}^{\varphi\psi}(\beta_0)(\delta_{t-1}(\beta_0), \dots, \delta_{t-p}(\beta_0))^\top.$$

RA-оценки в ARMA-моделях были предложены в работе [1]. Робастный тест на основе знаковых ковариаций (в случае $\varphi = \psi = \text{sign}$) был разработан в [2]. RA-тест для AR(1) описан в [3]. Здесь мы рассматриваем более общий случай AR(p). Доказана асимптотическая нормальность предложенных тестовых статистик при гипотезе, а также при локальных альтернативах. Асимптотическая относительная эффективность RA-тестов относительно известных тестов наименьших квадратов и знаковых тестов может быть больше единицы. Численным экспериментом продемонстрирована робастность RA-тестов для ограниченных функций ϕ, ψ .

Теорема. Пусть распределение $\varepsilon_1 \sim G$ имеет абсолютно непрерывную левобегую плотность $g(x) > 0$. Пусть $\varepsilon_1, (g'/g)(\varepsilon_1), \varphi(\varepsilon_1), \psi(\varepsilon_1)$ имеют нулевые средние и конечные ненулевые дисперсии. Тогда при локальных альтернативах $H_{1n}: \beta = \beta_n = \beta_0 + n^{-1/2}\tau$ имеем

$$n^{-1/2}\mathbf{T}_n^{\varphi\psi}(\beta_0) \xrightarrow{d} N^p \left(-\mathbf{E}\varphi(\varepsilon_1)\varepsilon_1 \mathbf{E}\psi(\varepsilon_1) \frac{g'}{g}(\varepsilon_1) \mathbf{K}(\beta_0)\tau, \right. \\ \left. \mathbf{E}\varphi^2(\varepsilon_1) \mathbf{E}\psi^2(\varepsilon_1) \mathbf{K}(\beta_0) \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\mathbf{K}(\beta) := \sum_{t=1}^{\infty} (\delta_{t-1}(\beta), \dots, \delta_{t-p}(\beta))^\top (\delta_{t-1}(\beta), \dots, \delta_{t-p}(\beta)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. O. H. Bustos, V. J. Yohai, "Robust estimates for ARMA models", *J. Amer. Statist. Assoc.*, **81**:393 (1986), 155–168.
2. М. В. Болдин, Г. И. Симонова, Ю. Н. Тюрин, *Знаковый статистический анализ линейных моделей*, Наука, М., 1997, 288 с.; англ. пер.: M. V. Boldin, G. I. Simonova, Yu. N. Tyurin, *Sign-based methods in linear statistical models*, Transl. Math. Monogr., **162**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, xii+234 pp.
3. А. Очиров, *Об RA-процедурах проверки гипотез и оценивании в авторегрессии*, Дипл. работа, рук. М. В. Болдин, 2025.

Рязанцев М. Ю. (Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия). **Об одном стохастическом дифференциальном включении леонтьевского типа**¹³).

Рассматривается стохастическое алгебро-дифференциальное включение, чей матричный пучок регулярен и удовлетворяет условию ранг-степень, с использованием симметрической производной в среднем. Это позволяет учесть квантовые эффекты, которые превращают детерминированный входящий сигнал в стохастический процесс. Доказывается существование решения включения, а также существование решения, минимизирующего некоторый функционал качества этого включения.

Рассмотрим стохастическое алгебро-дифференциальное включение с симметрическими производными в среднем и дополнительным “шумом” в правой и левой частях следующего вида:

$$\begin{cases} D_S \left(A\xi(t) + \int_0^t w(s) ds \right) \in B\xi(t) + F(t) + w(t), \\ D_2\xi(t) = \Lambda(t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $F: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми образами. Это включение может описывать некоторые динамические сигналы в электронном устройстве.

Теорема 1. *Любая последовательность ε -аппроксимаций ($\varepsilon > 0$) многозначного отображения $F(t)$ порождает совершенное решение алгебро-дифференциального стохастического включения (1) с любым начальным условием $\xi(0) = \xi_0$.*

Пусть g – непрерывная ограниченная числовая функция, определенная на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Для решений уравнения (1) рассмотрим функционал качества

$$G(\xi(\cdot)) = \int_0^T \mathbf{E}[g(t, \xi(t))] dt. \quad (2)$$

Теорема 2. *Среди совершенных решений включения (1) имеется решение ξ , на котором значение G минимально.*

Рыков В. В. (Российский университет дружбы народов, Москва, Россия; РГУ нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина, Москва, Россия). **Исследование системы $(GI|GI|m, n)$ методом маркированных марковских процессов.**

Для исследования системы массового обслуживания $(GI|GI|m, n)$ привлекается понятие маркированного марковского процесса $Z(t) = (J(t), \mathbf{V}(t))$ по моментам $S(t)$ ($t = 0, 1, 2, \dots$), изменения состояний системы, где компонента $J(t)$ представляет число требований в системе, а метками $\mathbf{V}_j(t) = (X_j(t), \mathbf{Y}_j(t))$ служат наборы случайных величин $X_j(t)$ (время до поступления очередного требования) и $\mathbf{Y}_j(t) = (Y_j^{(1)}(t), \dots, Y_j^{(j \wedge n)}(t))$ (вектор остаточных длительностей

¹³Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00004, <https://rscf.ru/project/24-21-00004/>.

обслуживания требований, компоненты которого упорядочены в порядке возрастания). Исходная информация задается последовательностями независимых одинаково распределенных случайных величин A_i, B_i , являющихся интервалами между поступлениями требований и длительностями их обслуживания соответственно.

Теорема. При переходе системы из состояния j в состояние $j + 1$ метки преобразуются следующим образом: $X_{j+1}(t + 1) = A_{t+1}$; и при $j < n$, $i = 1, \dots, n - j$

$$Y_{j+1}^{(i)}(t + 1) = \begin{cases} Y_j^{(i)}(t) - X_j(t), & \text{если } i < l, \\ B_{t+1}, & \text{если } i = l, \\ Y_j^{(i+1)}(t) - X_j(t), & \text{если } i > l, \end{cases}$$

где $l = \max\{i: Y_j^{(i)}(t) - X_j(t) \leq B_{t+1}\}$, а при $j \geq n$, $i = 1, \dots, n - j$

$$Y_{j+1}^{(i)}(t + 1) = Y_j^{(i+1)}(t) - X_j(t).$$

Аналогично, при переходе из состояния j в состояние $j - 1$ метка $X_j(t)$ меняется как $X_{j-1}(t + 1) = X_j(t) - Y_j^{(1)}(t)$, преобразование метки Y_j имеет вид

$$Y_{j-1}^{(i)}(t + 1) = Y_j^{(i+1)}(t) - Y_j^{(1)}(t) \quad (i = 1, \dots, j) \quad \text{при } j \leq n;$$

а при $j > n$

$$Y_{j-1}^{(i)}(t + 1) = \begin{cases} Y_j^{(i)}(t) - Y_j^{(1)}(t), & \text{если } i < l, \\ B_{t+1}, & \text{если } i = l, \\ Y_j^{(i+1)}(t) - Y_j^{(1)}(t), & \text{если } i > l, \end{cases}$$

где $l = \max\{i: Y_j^{(i)}(t) - Y_j^{(1)}(t) \leq B_{t+1}\}$.

Опираясь на преобразование меток, методом имитационного моделирования вычисляются основные вероятностно-временные характеристики системы и проводится анализ их чувствительности к виду распределений исходной информации и их параметрам.

Саенко В.В. (Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия). **Оценка остаточного члена в разложении устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$.**

Рассматривается устойчивый закон с характеристической функцией

$$\hat{g}(t, \alpha, \theta) = \exp \left\{ -|t|^\alpha \exp \left\{ -i \frac{\pi}{2} \alpha \theta \operatorname{sign} t \right\} \right\},$$

где $t \in \mathbf{R}$, $\alpha \in (0, 2]$, $|\theta| \leq \min(1, 2/\alpha - 1)$. Ранее в работах [1], [2] получено разложение и исследован главный асимптотический член в разложении устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$. Однако оценок остаточных членов получено не было. Данная работа восполняет этот пробел. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Для любых фиксированных $-1 \leq \theta \leq 1$ и $y \in \mathbf{R}$ разложение функции распределения $G(y, \alpha, \theta)$ устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$ и $y \neq 0$ имеет

вид

$$G(y, \alpha, \theta) = \frac{1}{2}(1 - \theta) + \frac{1}{2}e^{-|y|^{-\alpha}} \left(\operatorname{sign} y + \theta + \sum_{n=1}^N (\operatorname{sign} y C_n^{(0)} + \theta C_n^{(1)}) P_n(|y|^\alpha) \frac{\alpha^n}{n!} \right) + R_{N+1}^G,$$

где для остаточного члена R_{N+1}^G справедлива оценка

$$R_{N+1}^G \leq \mathbb{R}_{N+1}^G = \frac{1}{2} \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} (\bar{C}_{N+1}^{(0)} + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}) e^{-|y|^{-\alpha}} \bar{P}_{N+1}(|y|^\alpha).$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_n^{(k)} &= Y_n(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}), & \bar{C}_n^{(k)} &= Y_n(\bar{a}_1^{(k)}, \bar{a}_2^{(k)}, \dots, \bar{a}_n^{(k)}), \\ a_1^{(k)} &= -\mathbb{C}, & a_n^{(k)} &= b(n, k, \theta) - (n-1)! \zeta(n), \quad n \geq 2, \\ \bar{a}_1^{(k)} &= \mathbb{C}, & \bar{a}_n^{(k)} &= b(n, k, \theta) + (n-1)! \zeta(n), \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

где $k = 0, 1$ и

$$b(n, k, \theta) = \frac{1}{n} (2^n - 1)^{1-k} \pi^n (1 - \theta^n) |B_n|,$$

$\mathbb{C} = 0.577\dots$ — постоянная Эйлера, B_n — числа Бернулли, $\zeta(n)$ — дзета-функция Римана, $Y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — полные полиномы Белла, $P_n(y)$ и $\bar{P}_n(y)$ — полиномы, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} P_{n+1}(y) &= -\frac{1}{y} P_n(y) - y P_n'(y), & P_0(y) &= 1, \\ \bar{P}_{n+1}(y) &= \frac{1}{y} \bar{P}_n(y) - y \bar{P}_n'(y), & \bar{P}_0(y) &= 1. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, М., 1983, 304 с.; англ. пер.: V. M. Zolotarev, *One-dimensional stable distributions*, Transl. Math. Monogr., **65**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, x+284 pp.
2. N. Cressie, "A note on the behaviour of the stable distributions for small index α ", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, **33:1** (1975), 61–64.

Серикова А. А., Тихов М. С. (ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия; Казахстан). **Ядерные оценки симметричной функции распределения в модели бинарного отклика.**

Пусть $\mathcal{X}^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью $f(x)$ и функцией распределения $F(x)$, а $\mathcal{U}^{(n)} = (u_1, \dots, u_n)$ — последовательность неслучайных величин, $W_j = \mathbf{I}(X_j < x)$ — индикатор события $\{X_j < x\}$, который принимает значение 1 с вероятностью p , где $p = F(x) = \mathbf{E}W = \mathbf{P}(X_j < x)$. Мы наблюдаем выборку (фиксированный план испытаний)

$$\mathcal{W}^{(n)} = \{(W_j, u_j), j = 1, \dots, n\},$$

по которой требуется построить состоятельную оценку функции распределения $F(x)$. В качестве такой оценки рассмотрим статистику

$$F_n(x) = (nh)^{-1} \sum_{j=1}^n W_j K((x - u_j)h^{-1}),$$

где

$$h = h(n), \quad hn^{1/5} = 1 + o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В работе [1] предложены некоторые условия регулярности, при выполнении которых оценки $F_n(x)$ являются состоятельными и асимптотически нормальными. Асимптотическая дисперсия этих статистик равна

$$\sigma^2(x) = F(x)(1 - F(x))\|K\|^2, \quad \text{где } \|K\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(x) dx.$$

В настоящем сообщении мы рассматриваем фиксированный план испытаний, причем $\{u_1, \dots, u_n\}$ есть последовательность Ван дер Корпута [2], и предполагаем, что функция распределения случайной величины X является симметричной относительно нуля, т.е. $F(x) = 1 - F(-x)$, $x \in \mathbf{R}$. В качестве оценки неизвестной функции распределения возьмем

$$F_n^*(x) = \frac{1}{2} (F_n(x) + 1 - F_n(-x)).$$

Теорема. Пусть выполнены условия теоремы 4.2.1 из [1]. Тогда

$$(i) F_n^*(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} F(x), \quad (ii) \sqrt{nh} (F_n^*(x) - \mathbf{E}(F_n^*(x))) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \sigma_0^2(x)),$$

где

$$\mathbf{E}(F_n^*(x)) = F(x) + \frac{h^2}{2} f'(x) \int_{-1}^1 z^2 K(z) dz + O(h^4), \quad \sigma_0^2(x) = \frac{1}{2} \sigma^2(x).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. С. Тихов, Д. С. Криштопенко, М. В. Ярошук, “Оценивание распределений в зависимости доза-эффект при фиксированном плане эксперимента”, Межвуз. сб. науч. тр., Статистические методы оценивания и проверки гипотез, **19**, Перм. ун-т, Пермь, 2006, 66–77; англ. пер.: M. S. Tikhov, D. S. Krishtopenko, M. V. Yaroshuk, “Estimation of distributions under dose-effect dependence with fixed experiment plan”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **220:6** (2017), 753–762.
2. H. Niederreiter, *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., **63**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992, vi+241 pp.

Шабанов Д. А. (МФТИ, Долгопрудный, Россия; МГУ им. М. В. Ломоносова и НИУ ВШЭ, Москва, Россия). **О минимальном суммарном случайном весе k непересекающихся остовных деревьев.**

Рассматривается стохастическая задача экстремального типа на дискретных структурах. Пусть G_n — полный граф на n вершинах, ребрам которого приписаны независимые случайные веса с равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$. Проблема состоит в поиске распределения минимального веса остовного дерева в G_n . В 1985 г. А. Фризом было доказано, что такая величина по вероятности сходится к $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$. Мы рассматриваем обобщение данной задачи, связанное с поиском минимального суммарного веса k непересекающихся остовных деревьев в G_n . Основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема. Пусть $k > 1$ фиксировано, а также дана функция распределения $F(x)$ положительной случайной величины, причем $F(x) \sim ax$ при $x \rightarrow 0+$. Пусть ребрам G_n приписаны независимые одинаково распределенные случайные веса с распределением $F(x)$. Тогда минимальный суммарный вес k непересекающихся остовных деревьев в G_n сходится по вероятности к величине

$$\frac{1}{a} \int_0^{\infty} x(1 - \beta_k^2(x)) dx,$$

где $\beta_k(x) = 0$ при $x < 2c_k$, а иначе $\beta_k(x)$ является решением уравнения

$$\beta_k(x) = 1 - \mathbf{P}(\xi \geq k), \quad \xi \sim \text{Pois}(\beta_k(x)x).$$

В свою очередь c_k также является положительным решением уравнения

$$\frac{c_k \mathbf{P}(\eta \geq k-1)}{\mathbf{P}(\eta \geq k)} = k, \quad \eta \sim \text{Pois}(2c_k).$$

Доклад основан на совместной работе с Н. С. Звонковым.

Шерки Д. С. (Сколтех, AI4Science, Сбер, Москва, Россия). **Байесовские обратные задачи и согласование потоков: эффективный и гибкий вывод на основе трансформеров [1].**

Рассматривается стохастическая обратная задача, задаваемая моделью

$$d = \mathcal{F}(e, m) + \eta, \quad m \sim \pi_0, \quad e \sim \chi, \quad \eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2 I),$$

где $\mathcal{F}: \mathbf{R}^{d_e} \times \mathbf{R}^{d_m} \rightarrow \mathbf{R}^{d_d}$ — вычислительно затратная прямая задача, описывающая зависимость данных от параметров, например, заданная в виде численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или уравнений в частных производных.

Цель: аппроксимировать апостериорное распределение

$$\pi(m | d, e) \propto \exp\left(-\frac{\|d - \mathcal{F}(e, m)\|^2}{2\sigma_\eta^2}\right) \pi_0(m),$$

причем число наблюдений d может быть произвольным.

Метод: предлагается *условное согласование потоков* (Conditional Flow Matching, CFM), в рамках которого обучается зависящее от времени векторное поле $u_t^\theta(\cdot | e, d)$, параметризуемое трансформером. Это поле задает ОДУ $M_t = u_t^\theta(M_t | e, d)$, $M_0 \sim \pi_0$, которое за интервал $t \in [0, 1]$ транспортирует выборки из априорного распределения π_0 к апостериорному $\pi(\cdot | d, e)$.

Параметры θ оптимизируются по задаче регрессии

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathbf{E}_{t, M_0, M_1} \|u_t^\theta(M_t | e, d) - (M_1 - M_0)\|^2,$$

где $M_1 \sim \pi(m | d, e)$ генерируется с помощью прямого решателя лишь на этапе обучения.

Теорема. Пусть отображение $\mathcal{F}$ локально липшицево по m с константой $C > 0$ и

$$\sup_{t \in [0, 1]} \mathbf{E}_{M_t} \|u_t^\theta(M_t | e, d) - r_t(M_t | e, d)\|^2 \leq \varepsilon,$$

где

$$r_t(x | e, d) = \mathbf{E}[M_1 - M_0 | M_t = x, e, d].$$

Предположим, что $\varepsilon \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\mathcal{L}(\theta) \rightarrow 0$. Тогда для фиксированной пары (e, d) распределение $\tilde{\pi}_1^\theta$ выборок, полученных интегрированием выученного ОДУ, сходится к истинному апостериорному:

$$\mathcal{D}_{\text{KL}}(\tilde{\pi}_1^\theta, \pi(\cdot | d, e)) \leq C\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow[n \rightarrow \infty, \mathcal{L}(\theta) \rightarrow 0]{} 0.$$

Эксперименты: метод проверен на трех численных примерах, а именно на нелинейной алгебраической модели $d = e^2 m^3 + m \cdot e^{-|0.2 - e|} + \eta$, эпидемиологической системе SEIR и задаче восстановления проницаемости пористой среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Sherki, I. Oseledets, E. Muravleva, *Bayesian inverse problems meet flow matching: efficient and flexible inference via transformers*, 2025, 13 pp., [arXiv: 2503.01375](https://arxiv.org/abs/2503.01375).

Шнурников И. Н. (Научно-технологический университет “Сириус”, Сочи, Россия). **Модели оборота портфеля на основе матрицы ковариаций.**

Алгоритмическая торговая стратегия (АТС) генерирует вектор длинных или коротких позиций по торгуемым активам к определенным моментам времени. *Оборот* АТС (портфеля) равен l_1 -норме разности векторов позиций в последовательные моменты времени.

Предположение модели. Оборот портфеля выражается некоторой функцией от весов АТС, их оборотов и ковариационной матрицы доходностей.

В рамках сформулированного выше предположения З. Какушадзе и Дж. К. С. Лью в 2014 г. предложили оценки оборота, но сделали это с недостаточными математическими обоснованиями. В совместной статье с А. В. Кулигой [1] мы исправили эти недостатки. Случайный вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ называется *допустимым*, если дисперсия $\mathbf{D}\alpha_i$ равна единице для всех $i = 1, \dots, n$ и ненулевая линейная комбинация

компонент вектора не может быть равна константе почти наверное. Пусть $V(\alpha)$ — это пространство $\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$ для $x_i \in \mathbf{R}$ и допустимого α , а C — это ковариационная матрица.

Теорема. Пусть α — допустимый и функция $f: V(\alpha) \rightarrow \mathbf{R}$ абсолютно однородна степени 1. Тогда функция F такая, что

$$f(\xi_1 + \xi_2) = F(C(\xi_1, \xi_2), f(\xi_1), f(\xi_2)) \quad \text{для всех } \xi_1, \xi_2 \in V(\alpha),$$

существует в том и только том случае, когда существует константа f_0 такая, что

$$f(\xi) = f_0 \sqrt{\mathbf{D}\xi} \quad \text{для всех } \xi \in V(\alpha).$$

Предложение. Пусть предположение модели верно, τ_i — это оборот i -й АТС для $i = 1, \dots, n$, а κ — это отношение $\tau_i / \sqrt{C_{ii}}$. Тогда оборот портфеля с весами x равен $\kappa \sqrt{x^\top C x}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. V. Kuliga, I. N. Shnurnikov, *Turnover of investment portfolio via covariance matrix of returns*, 2024, 15 pp., [arXiv: 2412.03305](https://arxiv.org/abs/2412.03305).

Шумафов М. М., Тлячев В. Б. (Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия). **Об устойчивости решений некоторых систем двух нелинейных дифференциальных уравнений, возмущенных белым шумом.**

В настоящей работе мы даем достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости по вероятности нулевого решения некоторых систем двух нелинейных дифференциальных уравнений, возмущенных белым шумом. Наши результаты обобщают результаты работы [1] для стохастического случая.

Рассматриваемые системы интерпретируются как системы стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито. Сформулируем один из наших результатов.

Теорема. Предположим, что в системе

$$\dot{x} = ax + f(y) + \sigma(x)\dot{\xi}(t), \quad \dot{y} = g(x) + by, \quad (1)$$

функции f , g и σ удовлетворяют условию Липшица, $g \in C^1$, а a и b — постоянные, $\dot{\xi}(t)$ — белый шум; $f(0) = g(0) = \sigma(0) = 0$.

Предположим, что существуют числа $m > 0$ и $c_i > 0$ ($i = 1, 2$) такие, что выполняются следующие условия:

- 1) $a < 0$ и $b < 0$;
- 2) $g(x)/x > c_1$ для всех $x \neq 0$, и $g'(x) < m$ для всех x ;
- 3) $yf(y) < 0$ для всех $y \neq 0$;
- 4) $0 < \sigma(x)/x < c_2$ для всех $x \neq 0$;
- 5) $mc_2^2 + 2ac_1 < 0$.

Тогда нулевое решение системы (1) глобально асимптотически устойчиво по вероятности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Н. Красовский, “Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений”, *ЛММ*, **17:6** (1953), 651–672.

Смородина Н. В. (ПОМИ РАН, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия). **Ветвящийся винеровский процесс с сингулярной интенсивностью ветвления.**

Построен ветвящийся одномерный винеровский процесс $X_x(t)$, начинающийся с одной частицы в точке $x \in \mathbf{R}$, интенсивность ветвления которого представляет собой обобщенную функцию

$$q_\alpha(x) = -|x|^{-1-\alpha}, \quad \text{где } \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Обобщенная функция q_α действует на основную функцию f как

$$\int (f(0) - f(x))|x|^{-1-\alpha} dx.$$

Для построенного процесса рассматривается полугруппа операторов P^t , действующая на функцию $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ как

$$[P^t \varphi](x) = \mathbf{E} \sum_{y \in X_x(t)} \varphi(y),$$

где суммирование проводится по всем частицам ветвящегося процесса $X_x(t)$, существующим в системе в момент времени t . Показано, что генератором полугруппы P^t является оператор

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + q_\alpha(x),$$

понимаемый в смысле работы [1]. Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ состоит из луча $(-\infty, 0]$ и единственного положительного собственного значения λ_0 , которому отвечает положительная собственная функция φ_0 , $\|\varphi_0\|_2 = 1$.

Теорема. Пусть $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$, через φ_1 обозначим ее проекцию на ортогональное дополнение к φ_0 . Тогда для любого $t > 0$ справедливо неравенство

$$\|P^t \varphi - e^{\lambda_0 t}(\varphi, \varphi_0)\varphi_0\|_2 \leq \|\varphi_1\|_2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. М. Савчук, А. А. Шкалик, “Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Матем. заметки*, **66:6** (1999), 897–912; англ. пер.: A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “Sturm–Liouville operators with singular potentials”, *Math. Notes*, **66:6** (1999), 741–753.

Соболев В. Н. (МГУ им. М. В. Ломоносова, РТУ МИРЭА, Москва, Россия), **Кондратенко А. Е.** (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия), **Елизарова Н. А.** (РТУ МИРЭА, Москва, Россия). **Обобщение теоремы А. Г. Постникова об убегающем пике.**

А. Г. Постников в своей монографии [1, § 26] сформулировал и доказал теорему об убегающем пике. Оказывается, что данная теорема выполняется для класса плотностей симметричных распределений [2]. При формулировке теоремы используются определения медленно колеблющейся на $\mathbf{R}$ функции и функции, медленно или слабо убывающей на $\mathbf{R}$, согласно [1, § 26].

Теорема. Пусть плотность распределения вероятностей $p(x)$ является четной функцией и

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(y-x) f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = l$$

при некоторых (или всех) произвольно больших λ , а функция $f(x)$ ограничена и медленно колеблется на $\mathbf{R}$ или ограничена, вещественна и слабо убывает на $\mathbf{R}$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

Следствие. Теорема из [1, § 26] получается при $p(x) = \sin^2(x)/(\pi x^2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Г. Постников, “Тауберова теория и ее применения”, Тр. МИАН СССР, **144**, Наука, М., 1979, 3–147; англ. пер.: A. G. Postnikov, “Tauberian theory and its applications”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **144** (1980), 1–138.
2. А. Н. Ширяев, *Вероятность*–1, 4-е изд., МЦНМО, М., 2007, 552 с.; англ. пер.: A. N. Shiryaev, *Probability*–1, 3rd ed., Grad. Texts in Math., **95**, Springer, New York, 2016, xvii+486 pp.

Степович М. А., Туртин Д. В. (Ивановский государственный университет, Иваново, Россия), **Серегина Е. В., Калманович В. В.** (Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского, Калуга, Россия), **Филиппов М. Н.** (ИОНХ им. Н. С. Курнакова, Москва, Россия). **Об одной возможности построения стохастической модели нагрева мишени электронным зондом средних энергий¹⁴⁾.**

Рассмотрена стохастическая модель нагрева мишени при ее облучении электронным зондом средних (до 50 кэВ) энергий. Доказана следующая теорема.

Теорема. Для математической модели облучения мишени электронным зондом средних энергий и распределения потерь энергии электронным зондом в мишени в виде

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho^*(\vec{r}) \cdot f(t),$$

где множитель $\rho^*(\vec{r})$ отвечает стационарному облучению, а множитель $f(t) \sim \sin(\omega t)$ отвечает нестационарной части, которая может меняться

¹⁴⁾ Исследование выполнено в рамках поддержанного федеральным государственным бюджетным образовательным учреждением высшего образования “Ивановский государственный университет” гранта № 2025-1-1.

случайным образом, температура нагрева мишени определяется следующим образом:

$$T(\vec{r}, t) = \frac{1}{c_0 \rho_0} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^*(xi) f(\tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^3} \exp\left\{-\frac{|\vec{r}-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\xi d\tau,$$

где

$$d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad \rho^*(\xi) = \rho^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ |\vec{r}-\xi|^2 = (x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + (z-\xi_3)^2.$$

Для параметров, характерных для электронно-зондовых технологий, оценка нагрева мишени дается формулой

$$T(x, y, z, t) = \frac{b^5[1 + \sin(\omega t)]}{16a^2 e \sqrt{\pi} c_0 \rho_0} \frac{1}{zz_0} \sqrt{\frac{4a^2 t + z_0^2}{4a^2 t + b^2}} \left(-\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \\ \times \left[\exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{b^2}\right) - \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4a^2 t + b^2}\right)\right].$$

Рассмотрено влияние случайных изменений функции $f(t)$ на характер нагрева мишени.

Сучкова Д. А. (УУНиТ, Уфа, Россия). **О задаче Коши для обобщенных стохастических и детерминированных уравнений Кортевега–де Фриза.**

Пусть $V(t)$, $t \in [0, T]$, — случайный процесс с непрерывными с вероятностью 1 реализациями. Исследуется обобщенное стохастическое уравнение Кортевега–де Фриза (GKdV) с шумом в нелинейном члене

$$d(u)_t + (f(u))_x * dV(t) + u_{xxx} dt = 0, \quad (1)$$

где $u(x, 0) = u_0(x)$, $(x, t) \in \mathbf{R} \times [0, T]$, шум представляется в виде симметричного интеграла [1]. Пусть

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{y^3}{3} + yz\right) dy$$

— функция Эйри второго рода.

Теорема. Пусть

$$u(x, t, V(t)) = (3t)^{-1/3} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Ai}\left(\frac{x-y}{(3t)^{1/3}}\right) u(y, 0, V(t)) dy, \quad (2)$$

где $u(y, 0, V(t))$ — решение при $t = 0$ задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial v} u(x, t, v) \Big|_{v=V(t)} + f'(u(x, t, V(t))) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t, V(t)) = 0$$

с начальным условием

$$u(x, 0, 0) = u_0(x), \quad f(u) \in C^2(\mathbf{R}), \quad u_0(x) \in C^3(\mathbf{R}).$$

Тогда задача Коши для исходного уравнения (1) имеет решение $u(x, t, V(t))$ [2], которое представляется в виде (2).

Замечание. Случай, когда шум воздействует одновременно на нелинейный и дисперсионный члены, а также случаи с шумом в дисперсионном члене либо в правой части уравнения исследованы в работах [3], [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ф. С. Насыров, *Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ*, Физматлит, М., 2011, 212 с.
2. F. Nasyrov, D. Suchkova, “On the Cauchy problem of stochastic and deterministic equations of Korteweg de Vries type”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **289**:3 (2025), 407–413.
3. Д. А. Сучкова, “Об обобщенных стохастических уравнениях Кортевега–де Фриза с временным шумом”, В ст.: “Тезисы докладов, представленных на Девятой международной конференции по стохастическим методам”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **69**:4 (2024), 828–829; англ. пер.: D. A. Suchkova, “On generalized stochastic Korteweg–de Vries equations with time noise”, In: “Abstracts of talks given at the 9th international conference on stochastic methods”, *Theory Probab. Appl.*, **69**:4 (2025), 663.
4. Д. А. Сучкова, “Стохастические уравнения Кортевега–де Фриза с временным шумом”, В ст.: “Тезисы докладов, представленных на Восьмой международной конференции по стохастическим методам”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **68**:4 (2023), 869; англ. пер.: D. A. Suchkova, “Stochastic Korteweg–de Vries equation with time noise”, In: “Abstracts of talks given at the 8th international conference on stochastic methods”, *Theory Probab. Appl.*, **68**:4 (2024), 704–705.

Сухоруков Д. А. (Институт AIRI, Москва, Россия). **Ансамблевые методы глубокого обучения для субсезонного и долгосрочного прогноза погоды: современные модели и перспективы.**

В работе рассматривается задача прогнозирования метеорологических параметров в глобальном масштабе на горизонтах долгосрочного (до 15 суток) и субсезонного (до 45 суток) прогнозов с применением методов глубокого обучения. Представлена систематизация современных моделей прогнозирования погоды, методов ансамблевого моделирования и источников метеорологических данных. Подробно проанализированы ключевые подходы к обучению моделей глубокого обучения для метеорологических задач, а также методы оценки качества ансамблевых прогнозов.

В качестве примера модели субсезонного прогнозирования рассмотрена архитектура FuXi-S2S [1], основанная на модифицированном вариационном автокодировщике. Отличительной особенностью данной модели является модуль генерации возмущений для скрытых представлений метеорологических данных, что обеспечивает превосходство над численным ансамблевым прогнозом ECMWF по ряду параметров, таких как количество осадков, температура на высоте 2 метров от поверхности и геопотенциал на дистанции от 10 до 45 суток прогнозирования. Для долгосрочного прогнозирования представлена модифицированная графовая модель GenCast [2], которая учитывает гауссовский шум во входных данных и использует обратный диффузионный процесс для предсказания метеорологических параметров по 12-часовой временной сетке. Это обеспечивает модели GenCast преимущество над ECMWF-ENS на 10–20% по

метрике CRPS на дистанции 2–4 суток и сопоставимое с численной моделью качество на дистанции 10–15 суток прогнозирования.

В заключение обсуждаются перспективные направления развития метеорологических моделей, включая гибридные и физически-информированные подходы [3], основанные на интеграции численных и нейросетевых методов [4], а также перечень индустриальных приложений, для которых долгосрочные и субсезонные прогнозы имеют высокую актуальность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. Chen, X. Zhong, H. Li, J. Wu, B. Lu, D. Chen, S.-P. Xie, L. Wu, Q. Chao, C. Lin, Z. Hu, Y. Qi, “A machine learning model that outperforms conventional global subseasonal forecast models”, *Nat. Commun.*, **15** (2024), 6425, 14 pp.
2. I. Price, A. Sanchez-Gonzalez, F. Alet, T. R. Andersson, A. El-Kadi, D. Masters, T. Ewalds, J. Stott, S. Mohamed, P. Battaglia, R. Lam, M. Willson, “Probabilistic weather forecasting with machine learning”, *Nature*, **637**:8044 (2025), 84–90.
3. W. Li, Z. Liu, K. Chen, H. Chen, S. Liang, Z. Zou, Z. Shi, *DeepPhysiNet: Bridging deep learning and atmospheric physics for accurate and continuous weather modeling*, 2024, 18 pp., [arXiv: 2401.04125](https://arxiv.org/abs/2401.04125).
4. D. Kochkov, J. Yuval, I. Langmore, P. Norgaard, J. Smith, G. Mooers, M. Klöwer, J. Lottes, S. Rasp, P. Düben, S. Hatfield, P. Battaglia, A. Sanchez-Gonzalez, M. Willson, M. P. Brenner, S. Hoyer, “Neural general circulation models for weather and climate”, *Nature*, **632**:8027 (2024), 1060–1066.

Тихомиров А. Н. (ФИЦ “Коми научный центр УрО РАН”, Сыктывкар, Россия). **Асимптотика эмпирических спектральных распределений структурированных случайных величин.**

Пусть $\mathbf{X}^{(ij)}$ и $\mathbf{Y}^{(ij)}$, $i, j = 1, \dots, k$, — два симметричных семейства симметричных вещественных случайных матриц размера $n \times n$. Будем считать, что для любой фиксированной пары индексов (i, j) , $i, j = 1, \dots, k$, элементы матриц $\mathbf{X}^{(i,j)}$, $\mathbf{Y}^{(i,j)}$ независимы (с учетом симметрии), имеют нулевое среднее и одинаковую конечную дисперсию:

$$\mathbf{E}X_{pq}^{(i,j)} = \mathbf{E}Y_{pq}^{(i,j)} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}(X_{pq}^{(i,j)})^2 = \mathbf{E}(Y_{pq}^{(i,j)})^2 = (\sigma_{pq}^{(i,j)})^2 < \infty.$$

Будем предполагать, что матрицы $\mathbf{X}^{(i,j)}$ ($\mathbf{Y}^{(i,j)}$) и $\mathbf{X}^{(i_1,j_1)}$ ($\mathbf{Y}^{(i_1,j_1)}$) либо совпадают при $(i, j) \neq (i_1, j_1)$, либо независимы. Пусть символ $\otimes$ обозначает произведение Кронекера. Рассмотрим матрицы вида

$$\mathbf{W}_\mathbf{X} = \sum_{i,j=1}^k \mathbf{E}^{(i,j)} \otimes \mathbf{X}^{(i,j)} \quad \text{и} \quad \mathbf{W}_\mathbf{Y} = \sum_{i,j=1}^k \mathbf{E}^{(i,j)} \otimes \mathbf{Y}^{(i,j)},$$

где $\mathbf{E}^{(i,j)}$ — матрица размера $k \times k$, у которой все элементы равны нулю, кроме (i, j) -го элемента, равного 1. Обозначим через $F_{n\mathbf{X}}(x)$ и $F_{n\mathbf{Y}}(x)$ эмпирические спектральные функции распределений матриц $\mathbf{W}_\mathbf{X}$ и $\mathbf{W}_\mathbf{Y}$ соответственно.

Теорема. Пусть существует константа C_0 такая, что для всех $n \geq 1$

$$\frac{1}{(nk)^2} \sum_{i,j=1}^k \sum_{p,q=1}^n (\sigma_{pq}^{(i,j)})^2 \leq C_0.$$

Предположим, что при всех $i, j = 1, \dots, k$ для случайных матриц $\mathbf{X}^{(ij)}$ и $\mathbf{Y}^{(ij)}$ выполняется условие Линдберга. Тогда

$$F_{n\mathbf{X}}(x) - F_{n\mathbf{Y}}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{по вероятности.}$$

Тихов М.С. (ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия). **Оценки функции распределения в модели q -геометрической регрессии зависимости “доза-эффект”.**

Пусть $\mathcal{X}^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью $f(x)$ и функцией распределения $F(x)$, и пусть $\mathcal{U}^{(n)} = (u_1, \dots, u_n)$ — неслучайные величины, а $W_j = \mathbf{I}(X_j < u_j)$ — индикатор события $\{X_j < u_j\}$, $1 \leq j \leq n$. Мы наблюдаем выборку $\mathcal{W}^{(n)} = \{(W_j, u_j), j = 1, \dots, n\}$, по которой требуется построить оценку функции распределения $F(x)$. Пусть $h = n^{-1/5}$, $K(x)$ — ядерная функция и

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(x) &= \left(\sum_{j=1}^n m \eta_j(x) \right) \left(\sum_{j=1}^n z_j \eta_j(x) \right)^{-1}, \\ \eta_j(x) &= \frac{K((u_j - x)/h)}{h}, \quad z_j \in \mathbf{NB}(F(u_j), m). \end{aligned}$$

Тогда (см. [1]) $\sqrt{nh}(\tilde{F}_n(x) - \mathbf{E}(\tilde{F}_n(x)))$ нормально асимптотически распределены со средним 0 и дисперсией

$$\sigma^2(x) = F^2(x)(1 - F(x))\|K\|^2, \quad \text{где} \quad \|K\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(x) dx.$$

Когда $F(u_j)$ мало, то случайные величины z_j могут принимать большие значения и желательно ограничить объем выборки, поэтому здесь в оценке $\tilde{F}_n(x)$ мы будем брать условную геометрически распределенную случайную величину ($z_j \in \mathbf{NB}(M, p_j, 1)$):

$$\mathbf{P}(z = k | z \leq M) = \frac{q^{k-1}}{[M]_q}, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

где $[M]_q = (1 - q^M)/(1 - q)$. Это распределение называется q -равномерным распределением на множестве $\{1, 2, \dots, M\}$ (см. [2, с. 60]), где $q = 1 - F(x)$. Пусть

$$q(x) = (1 - F(x))^M, \quad a(x) = 1 - M \cdot F(x) \frac{q(x)}{1 - q(x)}, \quad \nu(x) = \frac{F(x)}{a(x)},$$

и $\{u_1, \dots, u_n\}$ — почти равномерная последовательность Ван дер Корпута.

Теорема. При условиях теоремы 4.1 из [1]

$$(i) \tilde{F}_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} \nu(x), \quad (ii) \sqrt{nh}(\tilde{F}_n(x) - \mathbf{E}(\tilde{F}_n(x))) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{d}} N(0, \sigma_1^2(x)),$$

где

$$\sigma_1^2(x) = \rho^2(x) - a^2(x), \quad \rho^2(x) = \psi''(t)|_{t=1} \quad \text{и} \quad \psi(t) = \frac{t[M]_{qt}}{[M]_q}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. С. Тихов, “Отрицательная биномиальная регрессия в зависимости доза-эффект”, *Уфимск. матем. журн.*, **14**:4 (2022), 100–116; англ. пер.: M. S. Tikhov, “Negative binomial regression in dose-effect relationships”, *Ufa Math. J.*, **14**:4 (2022), 96–112.
2. С. А. Charalambides, *Discrete q-distributions*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2016, xii+245 pp.

Ульянов В. В. (НИУ ВШЭ, МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия). **Неасимптотический анализ коротких асимптотических разложений для целочисленных сумм с приложениями.**

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины с конечными моментами четвертого порядка. Пусть $S_n = X_1 + \dots + X_n$ со средним $\mu = \mathbf{E}S_n$ и дисперсией $\sigma^2 = \mathbf{D}S_n$. Для $i = 3, 4$ обозначим

$$L_i = \sigma^{-3} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k - \mathbf{E}X_k)^i$$

ляпуновские отношения третьего и четвертого порядка соответственно. Для целочисленной случайной величины ξ с характеристической функцией $v(t) = \mathbf{E}e^{it\xi}$, $t \in \mathbf{R}$, определим

$$V(\xi) = - \sup_{0 < t < 2\pi} \frac{\ln |v(t)|}{1 - \cos t}.$$

В докладе используется статья [1], где доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть целочисленные случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы и имеют конечные моменты четвертого порядка. Тогда найдется абсолютная постоянная $c > 0$, для которой

$$\sup_{k \in \mathbf{Z}} \left| \mathbf{P}\{S_n \leq k\} - \Phi_3\left(\frac{k + 1/2 - \mu}{\sigma}\right) \right| \leq \frac{c\sigma^2}{V} L_4,$$

где $V = \sum_{k=1}^n V(X_k)$ и

$$\Phi_3(x) = \Phi(x) - \frac{L_3}{6}(x^2 - 1)\varphi(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

($\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ — функция распределения стандартного нормального распределения и функция его плотности соответственно).

Также обсуждается применение этой теоремы к проблеме приближения распределений k -серий (см. детали в статье [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. Г. Бобков, В. В. Ульянов, “Поправка Чебышёва–Эджворта в центральной предельной теореме для целочисленных независимых слагаемых”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **66**:4 (2021), 676–692; англ. пер.: S. G. Bobkov, V. V. Ulyanov, “The Chebyshev–Edgeworth correction in the central limit theorem for integer-valued independent summands”, *Theory Probab. Appl.*, **66**:4 (2022), 537–549.

2. Ж. Су, В. В. Ульянов, С. Ван, “О приближении сумм локально-зависимых случайных величин с использованием возмущений оператора Стейна”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **70:1** (2025), 29–44; англ. пер.: Z. Su, V. V. Ulyanov, X. Wang, “On approximation of sums of locally dependent random variables via perturbations of Stein operator”, *Theory Probab. Appl.*, **70:1** (2025), 24–36.

Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия), **Хусанбаев Я. М.** (Институт математики им. В. И. Романовского АН Узбекистана, Ташкент, Узбекистан). **Малые отклонения критических процессов Гальтона–Ватсона с бесконечной дисперсией.**

Рассматривается ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона $\{Z(n), n \geq 0\}$, начинающийся с одной частицы нулевого поколения. Пусть $f(s) = \mathbf{E}s^\xi$ — производящая функция числа непосредственных потомков ξ одной частицы. Положим $f_0(s) = s$ и введем итерации функции $f(s)$ при помощи соотношений

$$f_n(s) = f(f_{n-1}(s)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Теорема. *Предположим, что закон распределения числа потомков частиц удовлетворяет условиям*

$$\mathbf{E}\xi = 1, \quad f(s) = s + (1-s)^{1+\alpha}L(1-s), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

где $\alpha \in (0, 1)$, а $L(z)$ — функция, медленно меняющаяся при $z \downarrow 0$. Если $\varphi(n)$, $n = 1, 2, \dots$, — такая детерминированная функция, что

$$\varphi(n) \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad n^{-1}\varphi(n) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}(0 < (1 - f_{\varphi(n)}(0))Z(n) \leq 1) \sim \frac{1 - f_n(0)}{\alpha n} \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \varphi(n).$$

Веретенников А. Ю. (ИШПИ РАН, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия). **Обзор некоторых актуальных направлений стохастического анализа и предельных теорем¹⁵⁾.**

Предлагается обзор недавних результатов в области предельных теорем и стохастического анализа. Здесь мы приводим по одной теореме о законе больших чисел и решениях стохастических дифференциальных уравнений.

1. Пусть последовательность случайных величин (ξ_n) равномерно интегрируема по Чезаро.

Теорема (обобщение закона больших чисел Ю. Ш. Чау 1971 г.). Пусть $\mathbf{E}\xi_n = 0$ для всех n и

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|\mathbf{E}(\xi_k \mid \xi_1 + \dots + \xi_{k-1})| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

¹⁵⁾Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “Базис”.

2. Рассмотрим следующее стохастическое дифференциальное уравнение в $\mathbf{R}^d$, $d \geq 1$ (здесь W_t — винеровский процесс на $\mathbf{R}^d$):

$$dX_t = \sigma(X_t) dW_t + b(X_t) dt, \quad X_0 = x, \quad (1)$$

с невырожденной диагональной матрицей σ вида $\sigma_{ii}(x^i)$; все σ_{ii} являются $1/2$ -гёльдеровыми. Пусть снос b имеет вид $b^i(x) = b_0^i(x^i) + b_1^i(x)$, где b_1 липшицева, а b_0 лишь измерима по Борелю; все коэффициенты ограничены. Следующая теорема (более общая) получена совместно с А. А. Ляпшиевой (МГУ).

Теорема (обобщение результата Т. Ямады и Ш. Ватанабе 1971 г.). *Уравнение (1) имеет поттраекторно единственное сильное решение.*

Яровая Е. Б. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия). **Поведение ветвящегося блуждания в зависимости от структуры ветвящейся среды.**

Основное отличие ветвящегося случайного блуждания (ВСБ) по решетке $\mathbf{Z}^d$ в однородной ветвящейся среде от ВСБ в неоднородной ветвящейся среде, т.е. среде, где генерация частиц происходит либо в выделенном числе точек $\mathbf{Z}^d$, как в [1], либо в каждой точке $\mathbf{Z}^d$, но с разными интенсивностями воспроизводства частиц, как в [2], состоит в том, что во втором случае показатель λ_0 экспоненциального роста численностей частиц зависит не только от интенсивности ветвления $\beta > 0$, но и от параметров блуждания. Такой эффект наблюдается в ВСБ по $\mathbf{Z}$ с одним источником ветвления частиц [1], в котором случайное блуждание задается разностным лапласианом

$$(\kappa \Delta u)(z) := \kappa \sum_{|z' - z| = 1} (u(z') - u(z)), \quad \kappa > 0, \quad u \in l^2(\mathbf{Z}),$$

и существует второй факториальный момент производящей функции потоков β_2 . При $\beta > 0$ в явном виде вычисляются собственное значение λ_0 оператора

$$\mathcal{H} = \kappa \Delta + \beta \mathcal{V}_0,$$

где $(\mathcal{V}_0 u)(z) = u(0) \delta_0(z)$, и значения функций Грина $G_{\lambda_0}(0, y)$ и $G_{2\lambda_0}(x, 0)$ через параметры β и κ . Для численности частиц $\mu_{t,x}(y)$ в точке $y \in \mathbf{Z}$ при условии $\mu_{0,x}(y) = \delta(y - x)$ справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если $\beta > 0$, то*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{E} \left(e^{-\lambda_0 t} \mu_{t,x}(y) - \lambda_0 G_{\lambda_0}(0, y) \xi_x \right)^2 = 0,$$

где $\lambda_0 = \sqrt{\beta^2 + \kappa^2} - \kappa$ и ξ_x — невырожденная случайная величина, у которой

$$\mathbf{E} \xi_x = 1, \quad \mathbf{E} \xi_x^2 = \frac{\beta_2}{2} \frac{G_{\lambda_0}^2(0, 0)}{G_{\lambda_0}(x, 0)} \frac{G_{2\lambda_0}(x, 0)}{1 - \beta G_{2\lambda_0}(0, 0)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, МЦНМО, М., 2025, 109 с.

2. Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая, “Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **68:4** (2023), 779–795; англ. пер.: N. V. Smorodina, E. B. Yarovaaya, “One limit theorem for branching random walks”, *Theory Probab. Appl.*, **68:4** (2024), 630–642.

Замятин А. А., Меликян М. В., Новак М. В. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия). **Асимптотика процесса накопления для случайного блуждания в области с границами.**

Рассмотрим счетную систему частиц в полосе $\Pi = \mathbf{Z} \times \{0, 1, \dots, N - 1\}$. В начальный момент времени в каждой точке множества $\Pi_+ = \mathbf{N} \times \{0, 1, \dots, N - 1\}$ расположена ровно одна частица. Динамика каждой частицы определяется однородной и дискретной по времени, неприводимой и непериодичной марковской цепью $\xi_t = (\xi_t^1, \xi_t^2)$ с пространством состояний Π и с переходными вероятностями

$$p_{l_1 j_1}^{lj} = \mathbf{P}(\xi_{t+1} = (l_1, j_1) \mid \xi_t = (l, j)), \quad (l, j), (l_1, j_1) \in \Pi,$$

удовлетворяющими условиям: $p_{l_1 j_1}^{lj} = 0$ при $|l - l_1| > 1$ и $p_{l_1 j_1}^{lj} = p_{l_1 - l, j_1}^{0j}$. Предполагается, что случайные блуждания различных частиц независимы и одинаково распределены. Обозначим через $n(t)$ число частиц, хотя бы раз пришедших в множество $\Pi_0 = \{0\} \times \{0, 1, \dots, N - 1\} \subset \Pi$ к моменту времени t . Определим эргодическую марковскую цепь с множеством состояний $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ и с переходными вероятностями

$$q_{j_1}^j = p_{l+1, j_1}^{lj} + p_{l, j_1}^{lj} + p_{l-1, j_1}^{lj}.$$

Обозначим через π_j стационарное распределение этой цепи, и пусть

$$v = \sum_{j=0}^{N-1} \pi_j m_j, \quad m_j = \mathbf{E}(\xi_{t+1}^1 - \xi_t^1 \mid \xi_t^1 = 0, \xi_t^2 = j), \quad j \in \{0, 1, \dots, N - 1\}.$$

Рассматриваемая модель принадлежит классу стохастических моделей роста [1].

Теорема. 1) Если $v < 0$, то $n(t)/t \rightarrow -Nv$ по вероятности при $t \rightarrow \infty$.

2) Если $v = 0$, то $\mathbf{E}n(t)/\sqrt{t} \rightarrow c > 0$ при $t \rightarrow \infty$, где константа c может быть найдена в явном виде.

Аналогичный результат для более простой модели получен в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. A. Malyshev, “Stochastic growth models without classical branching processes”, *Markov Process. Related Fields*, **28:2** (2022), 179–184.
2. А. А. Замятин, В. А. Малышев, “Накопление на границе для одномерной стохастической системы частиц”, *Пробл. передачи информ.*, **43:4** (2007), 68–82; англ. пер.: A. A. Zamyatin, V. A. Malyshev, “Accumulation on the boundary for a one-dimensional stochastic particle system”, *Probl. Inf. Transm.*, **43:4** (2007), 331–343.

Житлухин М. В. (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия). **Математическая модель рынка предсказаний** [1].

Рынки предсказаний — это системы, в которых агенты торгуют контрактами на исходы будущих случайных событий, формируя коллективный прогноз. Эмпирическим фактом является сравнительно хорошая точность таких прогнозов, однако теоретическое обоснование этого явления изучено недостаточно.

В работе предложена динамическая вероятностная модель, объясняющая (несколько упрощенный) механизм агрегации информации на одной из наиболее известных платформ рынков предсказаний — Iowa Electronic Markets.

Теорема. В рассматриваемой модели при наличии агентов, асимптотически корректно оценивающих условные вероятности последовательности случайных событий, коллективный прогноз сходится к истинным условным вероятностям.

Совместная работа с Н. А. Бадулиной и Д. В. Шатиловичем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N. Badulina, D. Shatilovich, M. Zhitlukhin, *On convergence of forecasts in prediction markets*, 2024, 13 pp., [arXiv: 2402.16345](https://arxiv.org/abs/2402.16345).

Зорин А. В. (ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия). **Об одном свойстве моментов скачков неоднородного процесса Пуассона с периодической интенсивностью.**

Пусть $\{\eta(t); t \geq 0\}$ — неоднородный процесс Пуассона с ведущей функцией

$$\mathbf{E}(\eta(t)) = \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds,$$

причем мгновенная интенсивность $\lambda(t)$ обладает следующим свойством:

$$\lambda(t + \tau) = \lambda(t) \quad \text{для некоторого } \tau > 0 \text{ и всех } t \geq 0.$$

Не уменьшая общности, положим $\tau = 1$. Пусть, далее, $T_0 = 0$ и T_n — момент n -го скачка процесса $\{\eta(t); t \geq 0\}$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа, указанного в скобках.

Теорема 1. Последовательность $X_n = \{T_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, является возвратной по Харрису общей цепью Маркова [1] с переходной плотностью $p(u, v)$, принимающей значение

$$(1 - e^{-\Lambda(1)})^{-1} \lambda(v) \exp\{-(\Lambda(1+v) - \Lambda(u))\}$$

при $0 \leq v \leq u \leq 1$ и значение

$$(1 - e^{-\Lambda(1)})^{-1} \lambda(v) \exp\{-(\Lambda(v) - \Lambda(u))\}$$

при $0 \leq u < v \leq 1$. Стационарное распределение цепи Маркова $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ имеет плотность $\lambda(u)/\Lambda(1)$, $0 \leq u \leq 1$.

На основании этого свойства дробных частей моментов скачков можно строить критерии согласия, непараметрические критерии на принадлежность семейству обыкновенных процессов Пуассона, а также оценивать неизвестную функцию интенсивности $\lambda(t)$ и ведущую функцию $\Lambda(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Теорема 2. Пусть даны натуральное r и точки $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$. Введем обозначение $\Delta_j = (\Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1}))(\Lambda(1))^{-1}$. Рассмотрим эмпирический процесс

$$w_n(t) = \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{I}(X_i < t) - \Lambda(t)(\Lambda(1))^{-1} \right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Тогда распределение вектора

$$(w_n(t_1) - w_n(t_0), w_n(t_2) - w_n(t_1), \dots, w_n(t_r) - w_n(t_{r-1}))$$

сходится при $n \rightarrow \infty$ к r -мерному нормальному распределению с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $\Sigma = (\sigma_{j,k})_{j,k=1,\dots,n}$, в которой

$$\sigma_{j,j} = \Delta_j(1 - \Delta_j) \quad \text{и} \quad \sigma_{j,k} = -\Delta_j\Delta_k \quad \text{при} \quad j \neq k.$$

Неоднородные процессы Пуассона с периодической интенсивностью находят разнообразные применения, и статистические выводы о них являются актуальным полем исследований (см. [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Нуммелин, *Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы*, Мир, М., 1989, 208 с.; пер. с англ.: E. Nummelin, *General irreducible Markov chains and non-negative operators*, Cambridge Tracts in Math., **83**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984, xi+156 pp.
2. Yu. A. Kutoyants, *Introduction to the statistics of Poisson processes and applications*, Front. Probab. Stat. Sci., Springer, Cham, 2023, xxiii+666 pp.

Зорин А. В. (ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия), **Кондратенко А. Е.** (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия), **Кондратенко Н. А.** (МФТИ, Долгопрудный, Россия), **Соболев В. Н.** (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия), **Чернышова Д. А.** (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия). **О сходимости дробной части сверток целочисленных случайных величин.**

В работе [1] была доказана сходимость к равномерному распределению дробных частей сверток одинаково распределенных пуассоновских случайных величин с увеличением числа слагаемых и получен явный вид распределений. В данной работе этот результат обобщается для произвольных целочисленных случайных величин.

Теорема. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ суть независимые одинаково распределенные целочисленные случайные величины с производящей функцией $\varphi(z)$, определенной при $|z| < 1 + \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда для произвольных $n, m \in \mathbf{N}$ и

$\ell \in \{0, \dots, m-1\}$ верно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\xi_1 + \dots + \xi_n\}_m = \ell) &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^n(u_k)}{u_k^\ell} \\ &= \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\varphi^n(u_k)}{u_k^\ell} \rightarrow \frac{1}{m}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $u_k = \exp(2\pi \frac{k}{m} i)$ — k -й корень m -й степени из единицы, $k = 0, \dots, m-1$, i — мнимая единица.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Е. Кондратенко, Н. А. Кондратенко, В. Н. Соболев, Д. А. Чернышова, “О сходимости дробной части свертки пуассоновских случайных величин”, В ст.: “Тезисы докладов, представленных на Восьмой международной конференции по стохастическим методам”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **68:4** (2023), 846–847; англ. пер.: “On convergence of the fractional part of convolutions of Poisson random variables”, In: “Abstracts of talks given at the 8th international conference on stochastic methods”, *Theory Probab. Appl.*, **68:4** (2024), 685.

Зотова Е. И. (УУНиТ, Уфа, Россия). **О методе решения задачи Коши для стохастических и детерминированных обобщенных уравнений Бюргерса.**

Исследуется задача Коши для стохастического обобщенного уравнения Бюргерса с шумом в нелинейной части:

$$\begin{aligned} u(x, t) - u(x, 0) + \int_0^t u_x(x, s) f'(u(x, s)) * dV(s) &= \int_0^t u_{xx}(x, s) ds, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \end{aligned} \quad (1)$$

где интеграл в левой части равенства (1) — симметричный интеграл [1] относительно процесса $V(t)$, обладающий непрерывными с вероятностью 1 реализациями. При $f(u) = u^2/2$ и $V(t) = t$ задача (1) сводится к задаче Коши для детерминированного уравнения Бюргерса [2].

Построен новый способ решения задачи Коши для стохастических и детерминированных обобщенных уравнений Бюргерса.

Теорема. Пусть функция $g(x, v)$ определяется из соотношения

$$g(x, v) = \varphi(x - v f'(g(x, v))), \quad (x, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

Тогда функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, V(t)) \exp\left\{-\frac{(x - \xi)^2}{4t}\right\} d\xi$$

является решением задачи Коши для стохастического обобщенного уравнения Бюргерса (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ф. С. Насыров, *Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ*, Физматлит, М., 2011, 212 с.
2. E. Hopf, "The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu_{xx}$ ", *Comm. Pure Appl. Math.*, **3:3** (1950), 201–230.